Mera om funktioner av typ $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$

(Ch IX)

Implicita funktionssatsen på allmän form

> Om $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ är en funktion av typ $\mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^n$ med kontinuerliga partiella derivator och punkten $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sådan att $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$ och
>
> $$\det \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0,$$
>
> så finns i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ precis en funktion med kontinuerliga (partiella) derivator
>
> $$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$
>
> för vilken
>
> $$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$
>
> Funktionen $\boldsymbol{f}$ är differentierbar och
>
> $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = -\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}\right)^{-1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

Ett exempel

Systemet $\quad \boldsymbol{F}: \begin{cases} \sin(x + y) + \sin(y + z) + z = 0 \\ \cos(x + y) + \cos(y + z) + y - 2 = 0 \end{cases}$

satisfieras av punkten $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Jacobimatrisen $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}(x,y,z)}$ är då $= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) + \cos(x+z) & \cos(x+z) + 1 \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) - \sin(y+z) + 1 & -\sin(y+z) \end{pmatrix}$

varav $\quad \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}(x,y,z)}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

Av detta ser man att

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)}$ är icke-singulär (dess determinant är = 1), så finns enligt implicita funktionssatasen en omgivning av $z = 0$ en differentierbar funktion

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(z) = \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix}$$

som satisfierar villkoren $\boldsymbol{F}(a(z),b(z),z) = 0$ och $a(0) = b(0) = 0$. Eller annorlunda uttryckt: Om variablerna x och y i det givna systemet betraktas som obekanta så är

$$\begin{cases} x = a(z), \\ y = b(z), \end{cases}$$

en lösning, som passerar genom origo då $z = 0$.

Derivatorna i origo av funktionerna a och b , dvs. $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}z}(0)$, kan också beräknas:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}z}(0) = \begin{pmatrix} a'(0) \\ b'(0) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dvs. } a'(0) = -2 \text{ och } b'(0) = 0$$

Observera slutligen att vi inte känner någon explicit formel för funktionerna $a(z)$ och $b(z)$. ■

Satsen om inversa funktioner

> Om $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ är av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ och har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}.$,
>
> så finns i en omgivning av denna punkt en differentierbar invers till $\boldsymbol{f}$ om och endast om
>
> $$\det\left[\frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})\right] \neq 0.$$
>
> Inversens Jacobimatris beräknas enligt
>
> $$\frac{d\boldsymbol{f}^{-1}}{d\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = \left[\frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\right]^{-1} \quad \text{där } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}).$$
>
> Eller, med andra beteckningar
>
> $$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{y}} = \left[\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{x}}\right]^{-1}$$

Ett exempel:

Låt $$\boldsymbol{f}: \begin{cases} u = x^2 \\ v = y \end{cases}$$

Man har att $$\frac{d\boldsymbol{f}}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och att} \quad \det \frac{d\boldsymbol{f}}{d(x,y)} = 2x \neq 0 \text{ om } x \neq 0.$$

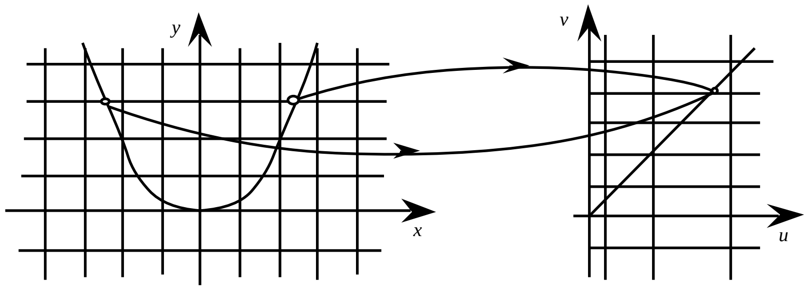
Satsen om inversa funktioner utsäger då att det kring varje punkt (x,y), som *inte* ligger på y–axeln, finns en omgivning i vilken funktionen $\boldsymbol{f}$ har en differentierbar invers med Jacobimatris:

$$\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I detta fall är det lätt att explicit ange inversen:

$$\boldsymbol{f}^{-1}: \begin{cases} x = \sqrt{u} \\ y = v \end{cases} \quad \text{om } x > 0 \quad \text{och } \boldsymbol{f}^{-1}: \begin{cases} x = -\sqrt{u} \\ y = v \end{cases} \quad \text{om } x < 0$$

Exemplet kan också förstås åskådligt:



Avbildningen $\boldsymbol{f}$ ”viker” xy–planet kring y–axeln och placerar det i högra halvan av uv–planet i något deformerat skick. (Se rutnätet!)

Om hela planet väljs som definitionsmängd är funktionen inte inverterbar, eftersom olika punkter, (x,y) och $(-x,y)$, avbildas på samma punkt (x^2,y) i uv–planet. Däremot är $\boldsymbol{f}$ inverterbar om definitionsmängden väljs till någon av halvplanen $\{(x,y) \mid x > 0\}$ eller $\{(x,y) \mid x < 0\}$. Till punkterna i ”vecket”, dvs. på y-axeln, finns däremot inga omgivningar i vilka $\boldsymbol{f}$ är inverterbar. Det är just dessa punkter som pekas ut som undantagspunkter av determinantvillkoret i satsen. ■

Övningar:

L23.1

Visa att funktionen

$$\begin{cases} u = x + \sin(x + y), \\ v = y + \sin(x - y), \end{cases}$$

har en differentierbar invers i en omgivning av $(x,y) = (0,0)$ och beräkna $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ då $(u,v) = (0,0)$.

L23.2

a. Visa att det i en omgivning av punkten $(0,0)$ finns precis en funktion $z = f(x,y)$ med kontinuerliga derivator sådan att

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 0 \quad \text{och} \quad f(0,0) = 0.$$

Bestäm också grad $z(0,0)$.

b. Visa att det i en omgivning av punkten 0 finns precis två funktioner $x = f(z)$ och $y = g(z)$ med kontinuerliga derivator sådana att

$$\begin{cases} x \cos y + y \cos z + z \cos x = 0 \\ x \cos z - y \cos x + z \cos y = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad f(0) = g(0) = 0$$

Bestäm också $f'(0)$ och $g'(0)$.

c. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \cos y + y \cos z + z \cos x = 0 \\ x \cos z - y \cos x + z \cos y = 0 \\ x \cos x + y \cos y - z \cos z = 0 \end{cases}$$

i en tillräckligt liten omgivning av origo bara har en lösning.

Svar:

L23.1

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

L23.2

a. grad $z(0,0) = (-1,-1)$ b. $f'(0) = -1$; $g'(0) = 0$