Peanos axiomsystem för de naturliga talen

P1. Det finns ett naturligt tal 0.

P2. Varje natutligt tal n har en s.k. efterföljare n^+.

P3. Om $n^+ = m^+$ så är $n = m$.

P4. Inget naturligt tal har 0 som efterföljare.

P5. Om man vet om en utsaga om naturliga tal att
I. den är sann för talet 0 och
II. den är sann för n^+ om den är sann för n,
så är utsagan sann för alla naturliga tal.
(Induktionsaxiomet)

Definitioner och räkneregler för de naturliga talen N

Addition kan definieras via induktion utifrån

1. $n + 0 = n$ för alla n **N**. **(D1+)**
2. Om $n + m$ är definierat, så är $n + m^+$ definierat som $(n + m)^+$. **(D2+)**

Olikheter

Definitioner: $x \leq y \Leftrightarrow$ Det finns ett naturligt tal z så att $x + z = y$. **(DO≤)**
$x < y \Leftrightarrow$ Det finns ett naturligt tal $z \neq 0$ så att $x + z = y$. **(DO<)**

Multiplikation kan definieras via induktion utifrån

1. $n \cdot 0 = 0$ för alla n **N**. **(D1·)**
2. Om $n \cdot m$ är definierat så är $n \cdot m^+$ definierat som $(n \cdot m) + n$. **(D2·)**

Speciellt $n \cdot 0^+ = n + n \cdot 0 = n + 0 = n$. (Vi brukar beteckna 0^+ med 1.)

Följande kan visaas utifrån Peanos axiom och dessa definitioner:

Neutrala element

$n + 0 = n$ $\qquad$ $n \cdot 1 = n$ **(Neu+, Neu·)**

Kommutativa lagar

$n + m = m + n$, $\qquad$ $n \cdot m = m \cdot n$. **(Kom+, Kom·)**

Associativa lagar

$(n + m) + p = n + (m + p)$, $\qquad$ $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$. **(Ass+, Ass·)**

Distributiva lagen

$(n + m) \cdot p = (n \cdot p) + (m \cdot p)$ **(Dist)**

Annuleringslagar

$n + m = n + p \quad m = p$. $\qquad$ Om $n \neq 0$: $n \cdot m = n \cdot p \quad m = p$. **(Ann+, Ann·)**

Lagar om olikheter

För alla n och m gäller exakt en av relationerna $n < m$, $n = m$, $m < n$. **(O1)**
Om $n < m$ och $m < p$ så är $n < p$ **(O2)**
$n \leq m \quad n + p \leq m + p$. om $p \neq 0$: $n < m \quad n \cdot p < m \cdot p$. **(O3+, O3·)**

Fler räknesätt:

Subtraktion ”$m – n$” kan definieras om $n \leq m$: **(D–)**

Observation. För n och m **N** har exvationen

$n + x = m$ har högst en lösning x **N**

Denna lösning skrivs $x = m – n$

Division ”$\frac{m}{n}$” **(D/)**

Observation:: För n och m **N**, $n \neq 0$, har ekvationen

$n \cdot x = m$ har högst en lösning x **N**

denna lösning skrivs $x = \frac{m}{n}$.

Konstruktion av heltalen Z (AEE §2.1-2)

Grundidén är att våra ”intuitiva” heltal alltid kan fås som lösningar till ekvationer av typen

$n + x = m$, där n och m är tal **N.**

Exempelvis är heltalet $x = –17$ lösning till ekvationen $18 + x = 1$, så talparet (18,1) i **N × N** karakteriserar det heltalet. Det finns förstås också andra sådana par som karakteriserar samma tal, exvis (20, 3) (eftersom 20 – 17 = 3). – alla par (n, m) **N × N** där $n + 1 = m + 18$ duger (och endast dessa).

Dessa iakttagelser ligger bakom följande definition av heltalen:

Ett heltal α är en mängd talpar **N × N** , sådana att

(n,m) och (p, q) α om och endast om $n + q = m + p$

Mängden som paret (n,m) hör till, skriver vi $[(n,m)]$.

Mängden av dessa s.k. heltal betecknas **Z**.

I **Z** definierar man sedan addition, multiplikation och olikhet enligt:

Om $\alpha = [(a, b)]$ och $\beta = [(c, d)]$, så är

$$\alpha + \beta = [(a + c, b + d)]$$
$$\alpha \cdot \beta = [(ad + bc, ac + bd)]$$
$$\alpha < \beta \Leftrightarrow b + d < a + c$$

(Man har då sneglat på att

α och β skall stå för lösningarna till $a + x = b$ och $c + y = d$

medan

$\alpha + \beta$ skall stå för lösningen $x + y$ till $(a + b) + (x + y) = (c + d)$,

$\alpha \cdot \beta$ för lösningen $x \cdot y$ till $(ad + bc) + (x \cdot y) = (ac + bd)$

och att

$b – a < d – c \Leftrightarrow b + d < a + c$.)

En ”kopia” av de naturliga talen finns med i **Z**$\cdot$ n **N** svarar mot $[(0,n)]$ **Z**.

Om n **N** skriver vi $\alpha = n$ istället för $[(0,n)]$.

Man kan utifrån detta verifiera de ”vanliga” räknereglerna

Z1	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$	(**Neu+, Neu·)**
Z2	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$,	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.	(**Kom+, Kom·**)
Z3	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$,	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.	(**Ass+, Ass·**)
Z4	$(\alpha + \beta)\cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$		(**Dist**)
Z5	$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ $\beta = \gamma$.	Om $\alpha \neq 0$: $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ $\beta = \gamma$.	(**Ann+, Ann·**)
Z6	För alla α och β gäller exakt en av relationerna $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$.		(**O1**)
Z7	Om $\alpha < \beta$ och $\beta < \gamma$ så är $\alpha < \gamma$		(**O2**)
Z8	$\alpha \leq \beta$ $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.	om $\gamma \neq 0$: $\alpha < \beta$ $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.	(**O3+, O3·**)

Annuleringslagen för addition kan ersättas av

Z9 Till varje α **Z** finns ett ”motsatt tal” $– \alpha$ med egenskapen

$$\alpha + (– \alpha) = 0 \qquad \textbf{(Inv+)}$$

Konstruktion av de rationella talen Q (AEE §2.3)

Grundidén är att våra ”intuitiva” rationella tal (bråk) alltid kan fås som lösningar till ekvationer av typen

$$\alpha \cdot \xi = \beta, \text{ där } \alpha \text{ och } \beta \text{ är tal } \quad \mathbf{Z} \text{ och } \alpha \neq 0.$$

Exempelvis är bråket $\xi = \frac{3}{5}$ lösning till ekvationen $5 \quad \xi = 3$, så talparet (3,5) i **Z** × **Z** karakteriserar detta rationella tal. Det finns förstås också andra sådana par som karakteriserar samma tal, exvis (–6, –10) (eftersom $-10 \cdot \frac{3}{5} = -6$). Alla par ($\alpha \neq 0$, β **Z** × **Z** där $5 \cdot \alpha = 3 \cdot \beta$ duger (och endast dessa).

Dessa iakttagelser ligger bakom följande definition av de rationella talen:

Ett rationellt tal *A* är en mängd talpar **Z** × **Z** , sådana att

$$(\alpha,\beta) \text{ och } (\gamma, \delta) \quad A \text{ om och endast om } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

Mängden som paret (α,β) hör till, skriver vi $[(\alpha,\beta)]$.

Mängden av dessa s.k. rationella tal betecknas **Q**.

I **Q** definierar man sedan addition, multiplikation och olikhet enligt:
Om $A = [(\alpha, \beta)]$ och $B = [(\gamma, \delta)]$, så är

$$A + B = [(\alpha\delta + \beta\gamma, \beta\delta)]$$
$$A \cdot B = [(\alpha\gamma, \beta\delta)]$$
$$A < B \Leftrightarrow \alpha\delta < \beta\gamma \text{ om } \beta\delta > 0$$

(Man har då sneglat på att

A och *B* skall stå för lösningarna till $\beta \cdot \xi = \alpha$ och $\delta \cdot \eta = \gamma$

medan

$A +\ B$ skall stå för lösningen $\xi + \eta$ till $\beta\delta\,(\xi + \eta) = \alpha\delta + \beta\gamma$,,

$A \cdot\ B$ skall stå för lösningen $\xi \cdot \eta$ till $(\beta\delta) \cdot (\xi \cdot \eta) = \alpha\gamma$,

och att

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta < \beta\gamma \text{ om } \beta\delta > 0.)$$

En ”kopia” av de hela talen **Z** finns med i **Q**. α **Z** svarar mot $[(1,\alpha)]$ **Q**.
Om α **Z** skriver vi $A = \alpha$ istället för $[(1,\alpha)]$.

Man kan utifrån detta verifiera de ”vanliga” räknereglerna

Q1 $A + 0 = A$ $\quad$ $A \cdot 1 = A$ **(Neu+, Neu·)**

Q2 $A + B = B + A$, $\quad$ $A \cdot B = B \cdot A$. (**Kom+, Kom·**)

Q3 $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\quad$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. (**Ass+, Ass·**)

Q4 $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$ (**Dist**)

Q5 $A + B = A + C \qquad B = C$. Om $A \neq 0$: $A \cdot B = A \cdot C \qquad B = C$. (**Ann+, Ann·**)

Q6 För alla A och B gäller exakt en av relationerna $A < B$, $A = B$, $B < A$. (**O1**)

Q7 Om $A < B$ och $B < C$ så är $A < C$ (**O2**)

Q8 $A \leq B \qquad A + C \leq B + C$. om $C \neq 0$: $A < B \qquad A \cdot C < B \cdot C$. (**O3+, O3·**)

Annuleringslagarna kan ersättas av

Q9+ Till varje A **Q** finns ett ”motsatt tal”: $-A$ med egenskapen

$$A + (-A) = 0 \qquad \textbf{(Inv+)}$$

och **Q9·** Till varje A **Q,** $A \neq 0$ finns ett ”inverst tal” A^{-1} med egenskapen

$$A \cdot A^{-1} = 1 \qquad \textbf{(Inv·)}$$

Begreppet *kropp*

Mängder **M** som åtminstone innehåller två element (här betecknade 0 och 1) och är försedda med två ”räknesätt” – vi kallar dem addition (betecknad +) och multiplikation (betecknad ·), för vilka gäller att

K1	$A + 0 = A$	$A \cdot 1 = A$	**(Neu+, Neu·)**
K2	$A + B = B + A$,	$A \cdot B = B \cdot A$.	(**Kom+, Kom·**)
K3	$(A + B) + C = A + (B + C)$,	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.	(**Ass+, Ass·**)
K4	$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$		(**Dist**)

K9+ Till varje A **M** finns ett ”motsatt tal” $-A$ med egenskapen

$$A + (-A) = 0 \qquad \textbf{(Inv+)}$$

K9· Till varje A **M**, $A \neq 0$, finns ett ”inverst tal” A^{-1} med egenskapen

$$A \cdot A^{-1} = 1 \qquad \textbf{(Inv·)}$$

kallas en *kropp*.

Om dessutom en relation ”<” (olikhet) är definierad så att

K6	För alla A och B gäller exakt en av relationerna $A < B$, $A = B$, $B < A$.	(**O1**)
K7	Om $A < B$ och $B < C$ så är $A < C$	(**O2**)
K8	$A < B \quad A + C < B + C$ och, om $C > 0$: $A < B \quad A \cdot C < B \cdot C$.	(**O3+, O3·**)

så säger man att **M** är en *ordnad kropp.*

Inom kropparna kan man bedriva *aritmetik* dvs räkning med de fyra räknesätten. +, –, · och /.

Q är alltså ett exempel på en ordnad kropp.

Konstruktion av de reella talen R. (AEE §4.3)

Informellt:

De rationella talen **Q** kan geometriskt åskådliggöras som punkter på en talllinje. Geometriskt sett finns det dock fler punkter på linjen än dessa rationella. Exvis, om man från 0 avsätter en sträcka lika lång som diagonalen i en kvadrat med sidan 1, så kommer sträckans andra ändpunkt inte att vara en rationell punkt. En idè om hur man kan fånga in dessa "hål" som tal i ett mera omfattande talsystem går som följer:

Vi föreställer oss att varje punkt på tallinjen (rationell eller ej) delar de *rationella* punkterna i två delar – de som "är mindre än" ("ligger till vänster om") hålet och de övriga. Denna "vänstermängd" – vi kallar den *a* har tydligen följande egenskaper

1. a **Q** och $a \neq$ **Q**, $a \neq$ (Obs *delmängd* av **Q**, inte element i **Q**!)
2. A a, B **Q** och $B <$ A B a
3. Det finns inget största element i a, dvs:
   Om A a så finns säkert (åtminstone) ett C a så att $A < C$.
   (Informellt: Mängden skall motsvara ett öppet intervall på reella tallinjen – "högerändpunkten" skall inte räknas med.)

En sådan mängd *a* kallar vi ett *snitt.*

Mot varje punkt på tallinjen svarar alltså ett snitt. Omvänt föreställer vi oss att varje snitt svarar mot en (och endast en) punkt på tallinjen (snittets "högerändpunkt"). Speciellt svarar maängden av de snitt vars "högerändpunkt" är ett rationellt tal, mängden **Q**.

Formellt går man nu tillväga på följande vis:

De reella talen förklaras vara identiska med snitten i kropppen **Q**
De rationella talen svarar då mot de snitt vars komplement **Q** – *a* har ett minsta element (nämligen det rationella talet ifråga).

Ordning, addition och multiplikation definieras sedan som beskrivet i AEE (Def 5.1.1, 5.1.3, 5.1.8).

Definition av *ordning*:

$a \leq b \Leftrightarrow$ snittet a snittet b.
$a < b \Leftrightarrow a \leq b$ och $a \neq b$,

Definition av *motsatt* reellt tal: För de snitt a som motsvarar rationella tal P, $a = \{B$ **Q**, $B < A$ **Q**$\}$ är det motsatta reella talet $-a$, snittet $\{B$ **Q**, $B < -A$ **Q**$\}$. För de snitt a som inte motsvarar rationella tal är det motsatta reella talet snittet $\{B$ **Q**; $-B$ $a\}$.

Angående *addition*:
Om a och b är två snitt så är mängden $c = \{C$ **Q**; $C = A + B$ för några A a och B $b\}$ också ett snitt. Detta snitt tas som definition av $a + b$.

Angående *multiplikation*:
Om a och b är två snitt ≥ 0 så är mängden $c = \{C$ **Q**; $C < A \cdot B$ för några $A \geq 0$ och a > 0, $B \geq 0$ och $b\}$ också ett snitt. För sådana a och b definieras $a \cdot b$ som detta snitt c. För övriga a och b, definieras $a \cdot b$ av $|a| \cdot |b|$ om både a och $b < 0$ och av $-|a| \cdot |b|$ om precis ett av a och $b < 0$. ($|a|$ betyder som vanligt, a om $a \geq 0$ och $-a$ om $a < 0$.)

Man kan sedan verifiera att alla kropplagarna K1-4,6-9 gäller, men nu tillkommer också den s.k. *supremumegenskapen*:

Om $\mathbf{M}$ är en mängd reella tal och B är ett tal < alla i $\mathbf{M}$,

dvs. om $\mathbf{M} \quad \mathbf{R}$ och $A < B$ för alla $A \quad \mathbf{M}$, (dvs om $\mathbf{M}$ är uppåt begränsad)

så finns det ett minsta reellt tal C, som är ≤ alla i $\mathbf{M}$,

dvs det finns ett tal C sådant att

° $d \leq C$ för alla $d \quad \mathbf{M}$,

° om $e < C$ så finns ett $d \quad \mathbf{M}$ så att $e < d \leq C$..

Supremumegenskapen kan visas vara ekvivalent med den s.k. *intervallinkapslingsegenskapen*:

Om $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq a_n \leq \ldots\ldots \leq b_n \leq \ldots\ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$
så finns det (minst) ett reellt tal x sådant att

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq a_n \leq \ldots \leq x \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots\ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

(Dvs om intervallen $[a_n, b_n]$ är inkapslade i varandra: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \quad [a_n, b_n]$,

så det finns ett reellt tal x som ligger i alla intervallen.)

Uppgifter (Om heltalsaritmetik)

1. Visa utifrån Peanos axiom att
   varje tal n **N**, $n \neq 0$, har en ”närmaste föregångare”, dvs $n = m^+$ för något m **N.**

2. Visa utifrån Peanos axiom och definitionen av addition
   a. att $0 + n = n$ för alla n **N**
   b. att $n + m^+ = n^+ + m$ för alla n och m **N**
   c. kommutativa lagen för addition, dvs att $n + m = m + n$ för alla n och m **N**
   d. associativa lagen för addition, dvs. att
   $(n + m) + p = n + (m + p)$, för alla n, m och p **N**
   e. Annuleringslagen för addition, dvs för alla x, y och z **N** gäller att
   $x + z = y + z \quad x = y$

3. Visa utifrån Peanos axiom och definitionen av multiplikation
   a. att $n \cdot 0^+ = n$, för alla n **N**,
   b. och med hjälp av kommutativa och associativa lagarna för addition att
   $(n + m)\cdot p = (n \cdot p) + (m \cdot p)$

4. Visa utgående från Peanos axiom, definitionerna och räknelagarna för addition och multiplikation, samt definitionerna av subtraktion och division,
   a. $n - 0 = n$, för alla n **N**,
   b. $n + (m - p) = (n + m) - p$
   c. $n - (m - p) = (n - m) + p$
   d. $n - (m + p) = (n - m) - p$
   e. $\dfrac{0}{n} = 0$ för alla n **N**, $n \neq 0$ och $\dfrac{m}{0^+} = m$ för alla m **N**.
   f. $n \cdot \dfrac{m}{p} = \dfrac{(n\ m)}{p}$
   g. $\dfrac{n}{m} + \dfrac{p}{d} = \dfrac{((n\cdot d) + (m\cdot p))}{(m\cdot d)}$

5. Om α och β Z. Visa utgående från räknelagarna för **Z** (**Z1-9**) att
   a. Om $\alpha = [(n, m)]$ n, m **N**, så är $-\alpha = [(m, n)]$.
   b. $(-1)\cdot\alpha = -\alpha$
   c. Låt subtraktion i **Z** *definieras* av $\alpha \overset{\Delta}{-} \beta = \alpha + (-\beta)$. Visa att detta, för de tal i **Z** som svarar mot de naturliga talen **N**, överensstämmer med den subtraktion (**D–**) som användes i **N**.