(Reella) linjära rum

En mängd **L** försedd med två ”räknesätt”

- addition (betecknad +) $\mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$
- multiplikation med skalär (betecknad ·), $\mathbf{R} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$

för vilka lagarna **L1 - L8** nedan gäller kallas ett *linjärt rum*[1].

Här betecknar vi elementen i **L** (*vektorerna*) med kursiva, feta latinska gemener ,***a***, ***b***,…., ***x***, ***y***, ***z*** … och de reella talen (*skalärerna*) med grekiska gemener α, β, … , λ, μ …, såvida de inte är explicita decimalbråk eller rationella tal:

L1	$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$,	**L5**	$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$,
L2	$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$,	**L6**	$(\lambda\mu) \cdot \boldsymbol{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{a})$,
L3	Det finns en ”nollvektor” **0** sådan att $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$,	**L7**	$(\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{a} = (\lambda \cdot \boldsymbol{a}) + \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{a})$,
L4	Till varje vektor ***a*** finns en ”motsatt” vektor $-\boldsymbol{a}$ sådan att $\boldsymbol{a} + (\ \boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$,	**L8**	$\lambda \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\lambda \cdot \boldsymbol{a}) + \cdot (\lambda \cdot \boldsymbol{b})$.

Vi betecknar ett sådan linjärt rum (**L**, **R**, + ,·)

Notera att (**L**, + , ·) iär en abelsk grupp

Några välkända exempel på linjära rum:

1. Låt vektorerna vara $\mathbf{L} = \mathbf{R}^2$ (dvs paren av reella tal) med

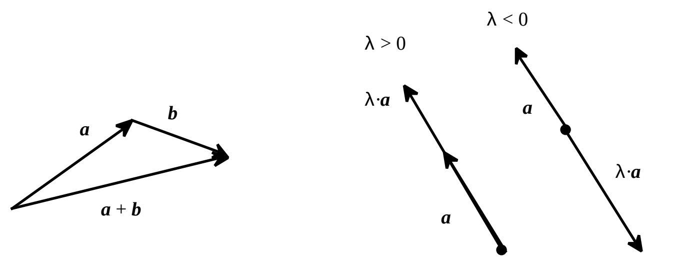
   addition: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

   multiplikation med skalär: $\alpha \cdot (x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} (\alpha x_1 \ \ \alpha x_2)$

2. Motsvarande i $\mathbf{R}^n$

3. Låt **L** vara mängden av pilar i planet, där vi betraktar två sådana om lika om de har samma längd och är lika riktade (egentligen är elementen i **L** då *ekvivalensklasser* pilar) med

   addition och multiplikation med skalär definierade enligt figurerna:



λ·***a*** är |λ| gånger längre än ***a***

4 Motsvarande för pilar i vår ”vanliga” 3-dimensionella rymd.

5 Låt **L** vara mängden av alla funktioner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ med

addition $(f + g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ och

multiplikation med skalär: $(\lambda \cdot f)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda \cdot f(x)$

---

[1] Mera precist: *Linjära rum över kroppen* ***R***. Mera allmänt kan man ersätta **R** med vilken somhelst kropp **K** – får då linjära rum *över* ***K***.

Övningar:

L1. Skriv upp definitioner för + och $\lambda\cdot$, så att $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum. (n står för något heltal ≥ 2.)

L2 Verifera att $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om + och $\cdot$ står för den vanliga additionen och multiplikationen.

L3. Verifera att $(\{0\}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om + och $\cdot$ står för den vanliga additionen och multiplikationen. (Detta ”triviala” rum kallas *nollrummet*.)

L4. Verifiera att rummet beskrivet i ex 5 ovan är linjärt.

L5. Låt **P** vara mängden av alla polynom $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Verifiera att $(\mathbf{P}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om + och $\cdot$ definieras som i exempel 5 ovan.

L6. Samma som föregående uppgift fast med följande delmängder av **P**
- a. {polynomen av grad $\leq n$}, där n något naturligt tal.
- b. {polynomen av grad $= n$}, där n något naturligt tal.
- c. {alla polynom p för vilka $p(\pi) = 0$}
- d. {alla polynom p för vilka $p(0) = \pi$}
- e. {alla polynom p för vilka $p'(2) = 0$, där p' är p:s derivata

L7. Låt $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ vara något linjärt rum och låt $\mathbf{M}$ $\mathbf{L}$.
Visa att $(\mathbf{M}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om och endast om följande båda villkor är uppfyllda:

I. $\boldsymbol{a}$ $\mathbf{M}$ och $\boldsymbol{b}$ $\mathbf{M}$ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ $\mathbf{M}$,

II. $\boldsymbol{a}$ $\mathbf{M}$ och λ $\mathbf{R}$ $\lambda\cdot\boldsymbol{a}$ $\mathbf{M}$.

Man säger att en vektor $\boldsymbol{a}$ är en *linjär kombination* av vektorerna $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ om

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{b}_k .$$

Vidare: En mängd **M** av vektorer sägs vara *linjärt oberoende* om ingen av vektorerna är en linjär kombination av de övriga i **M**. Det maximala antalet linjärt oberoende vektorer i **L** kallas rummets *dimension*. (Om denna inte är ett naturligt tal så säger vi att dimensionen är oändlig.)

L8. Verifiera att alla vektorer i ett rum av dimension 1 kan skrivas på formen $\lambda\cdot\boldsymbol{e}$ där $\boldsymbol{e}$ är en på förhand vald vektor $\neq \mathbf{0}$.

L9. Vilka är dimensionerna på de linjära rummen i uppgifterna L1 - L6?

L10 (Ett underligt(?) vektorrum)

Låt $\mathbf{R}_+$ = de positiva reella talen och definiera två räknesätt och :
a $b = ab$ (där a och b $\mathbf{R}_+$),
λ $a = a^\lambda$ (där λ $\mathbf{R}$ och a $\mathbf{R}_+$)

Verifiera att $(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}, \ , \ )$ är ett linjärt rum och att dess dimension = 1.

Två linjära rum $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ och $(\mathbf{M}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är *isomorfa* (”i allt väsentligt lika”) om det finns en bijektion $\phi : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{M}$ sådan att

I. $\phi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \phi(\boldsymbol{a}) + \phi(\boldsymbol{b})$ och
II. $\phi(\lambda\cdot\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\phi(\boldsymbol{a})$. (2

L11. Visa att alla vektorer i ett linjärt rum av dimension 1 är isomorfa. Ange någon isomorfi Det linjära rummet mellan $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ och det linjära rummet $(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}, \ , \ )$ i uppg L10.

Mera allmänt gäller att alla rum med samma dimension n (n $\mathbf{N}$) är isomorfa.

L12. Ange någon bijektion mellan de linjära rummen i L2 och L10, kompatibel med räknesätten.

L13 Ange någon bijektion mellan de linjära rummen i exempel 1 och 3 ovan

2 Bijektionen är ”kompatibel” med räknesätten.
På motsvarande sätt definierar man isomorfi mellan andra algebraiska strukturer (grupper ringar, kroppar……).