5B1493, lekt 7, HT06

Metriska rum, konvergenta följder

Översikt av Rosenlicht Ch3, §1 – 4

Metrik:

En *metrik* på en mängd **E** är en funktion d: $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ sådan att för alla p, q och r **E**,

(1) $d(p, q) > 0$ om $p \neq q$,
(2) $d(p, p) = 0$,
(3) $d(p, q) = d(q, p)$,
(4) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$

Funktionen d är en formalisering av begrepp av typen ”kortaste väglängd mellan två punkter”.

En mängd försedd med en metrik kallas ett *metriskt rum*.

Viktiga exempel på metriska rum: $\mathbf{E} = \mathbf{R}^n$ med $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$.[1]

Schwarz´ olikhet i $\mathbf{R}^n$: $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$, med likhet omm[2] $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y}$ eller $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.
(dvs. $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ parallella)

Triangelolikheten i $\mathbf{R}^n$: $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$, med likhet omm $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y}$, $\lambda \geq 0$ eller $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.
(dvs. $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ lika riktade)

Se Rosenlicht sid 35 - 36. (Framställningen där blir något voluminös eftersom R. inte använder sig av skalärprodukt och belopp.)

Öppna och slutna mängder R. Ch3,§2

Viktiga definitioner

Omgivning till p_0 med radie r, **Boll**: $\{p \quad \mathbf{E};\ d(p_0, p) < r\}$

Öppen mängd: Mängd där varje punkt har en omgivning som helt ligger i mängden.

Sluten mängd: Mängd vars komplement är öppet.

Inre punkt till mängd M **E**: Punkt som har någon omgivning som helt ligger i i **M**.[3]
Yttre punkt till mängd M **E**: Punkt som har någon omgivning vars skärning med **M** är tom.
Randpunkt till mängd M **E**: Punkt om varken är inre eller yttre punkt till **M**.

Begränsad mängd: Mängd som helt är innehållen i någon boll.

Konvergenta följder (R: Ch3,§3)

Att följden $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergerar* mot p, $\lim_{n \to \infty} p_n = p$, betyder att det till varje $\varepsilon > 0$ finns något tal N sådant att $d(p_n, p) < \varepsilon$ för alla $n > N$.

Cauchyföljder (R: Ch3, §4)

Följden $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en *Cauchyföljd* om det till varje $\varepsilon > 0$ finns något tal N sådant att $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ för alla n och $m > N$

Kompletta metriska rum

Konvergenta följder är alltid Cauchyföljder men omvändningen till detta gäller inte i alla metriska rum. *Om* omvändningen är riktig för ett speciellt metriskt rum så sägs det vara *komplett*.

Exempel på kompletta rum: $\mathbf{R}^n$.
Exempel på inkompletta rum: $\mathbf{Q}^n$.

Rekommenderade uppgifter för Rosenlicht Ch3,§1 - 4 (uppgifterna står på sid 61ff)

1, 3, 4, 5, 9 – 17, 22, 23, 24

---

1 Rosenlicht använder sig inte av skalärprodukt och belopp i $\mathbf{R}^n$,vilket vi dock vid behov gör.
2 Omm är en gängse förkortning för ”om och endast om”.
3 Begreppen inre, yttre resp randpunkt nämns i R först i några övningar (sid 62).