5B1493, lekt 8, HT06

Några exempel på metriska rum:

Ex 8.1. **E** = $\mathbf{R}^n$ och $d(\boldsymbol{x}, \mathbf{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, där $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2}$.
(Den så kallade *euklidiska* metriken.)

Ex 8.2. Varje delmängd av ett metriskt rum med samma metrik som rummets.

Ex 8.3. **E** en godtycklig mängd och $d(p, q) = 1$ om $p \neq q$ och annars = 0.
(Den så kallade *diskreta* metriken)

Ex 8.4. **E** = $\mathbf{R}^2$ och $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Ex 8.5. **E** = $\mathbf{R}^2$ och $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max(|x_1 - y_1| , |x_2 - y_2|)$.
(Skämtsam benämning: ”*taximetriken*” .Kan Du lista ut varför?)

Viktiga definitioner och begrepp (forts.)

Hopningspunkter (Cluster points), (Rosenlicht, sid 55)

En punkt p kallas *hopningspunkt* till en delmängd M av ett metriskt rum om varje omgivning till p innehåller oändligt många punkter från M.

Cauchyföljder har högst en hopningspunkt.
Cauchyföljd har hopningspunkten p Följden konvergerar mot p.

Om Cauchyföljden innehåller ∞ många *olika* element:
Följden konvergerar mot p Följden har hopningspunkten p.

Kompakthet (Rosenlicht Ch 3, §5)

Slutna och begränsade mängder **M** i $\mathbf{R}^n$ (med euklidisk metrik) karakteriseras av följande s.k. *övertäckningsegenskap*: (Rosenlicht ger bevis på sid 57 – 59.)

Om **M** $\;_{i \quad I} O_i$, där O_i, i **I**, är en (i allmänhet oändlig) samling *öppna* mängder, så finns det *ändlig* delfamilj av dessa öppna mängder vars union omfattar **M**.

• *Kompakta mängder i ett metriskt rum* **E** *är garanterat begränsade*.

Bevis: Låt **M** vara kompakt. Vi vill visa att det finns någon boll som omfattar hela mängden **M**.

Lägg en omgivning med radie < 1 kring var och en av **M**:s punkter. Unionen av dessa omgivningar omfattar då **M**, varför, på grund av övertäckningsegenkapen, redan unionen av ändligt många av dessa omfattar **M**.

Låt L vara det största av avstånden mellan dessa omgivningars centra och låt p_0 vara något av dessa. Då kommer en omgivning **O** till p_0 som har en radie > L +1 säkert innehålla alla punkter i **M**, ty varje punkt p **M** ligger i någon av de ovan konstruerade ändligt många omgivningarna. Kallar vi dess centrum p_1, så har vi att

$$d(p, p_0) \leq d(p, p_1) + d(p_1,p_0) < 1 + L, \qquad (1$$

dvs. p **O**.

---

1 Rita figur!

• *Kompakta mängder i ett metriskt rum* **E** *är garanterat slutna*.

Bevis:Vi behöver inse att varje punkt q som *inte* tillhör den kompakta mängden **M** är en yttre punkt till **M**, dvs att det finns en omgivning till q som inte innehåller någon av **M**:s punkter.

Låt alltså q **M**. Lägg kring varje punkt p **M** en omgivning $\mathbf{O}_p$ vars radie < halva avståndet mellan p och q: $\mathbf{O}_p = \{ r \quad \mathbf{E};\ d(r, p) < \frac{1}{2}\ d(q, p)\}$. Alla dessa omgivningars union omfattar **M**, varför redan unionen av ändligt många bland dem omfattar **M**.

Låt vara en omgivning **O** till q vars radie ρ är < den minsta av de nyss konstruerade ändligt många omgivningarnas radier. Denna omgivning innehåller inga punkter från **M**, ty varje punkt p **M** ligger i en av de nyss konstruerade ändligt många omgivningarna. Kallar vi dess centrum p_1 och radie ρ_1 så har vi att

$$d(p, q) \geq d(q, p_1) - d(p_1,p) > 2\rho_1 - \rho_1 = \rho_1 \geq \rho,$$ [2]

detta eftersom $d(q, p_1) = 2\rho_1$ och $d(p_1,p) < \rho_1$ dvs. p **O**.

• *Kompakta mängder i ett metriskt rum* **E** *är (som metriska rum betraktade) kompletta*.

Det som behöver visas är att varje Cauchföljd har ett gränsvärde i mängden.

Bevis finns på sid 56 i Rosenlicht.

Slutna och begränsade mängder i kompletta rum är i allmänhet inte kompakta. Rummen $\mathbf{R}^n$ utgör ett undantag för detta. Rosenlicht ger bevis på sid 57 – 59. Här kommer ett alternativt bevis för fallet $n = 1$, Beviset är indirekt:

Låt **M** vara en sluten och begränsad del av **R** och anta att **M** inte är kompakt. I så fall finns det en övertäckning av **M** med ett oändligt antal öppna mängder $\mathbf{O}_i$, i **I**, sådana att inga ändliga unioner av dem omfattar **M**.

Att **M** är sluten innebär att det finns ett intervall $[a_0, b_0]$ **M**. Dela detta intervall i två hälfter $[a_0, (a_0 + b_0)/2]$ och $[(a_0 + b_0)/2], b_0]$. De delar av **M** om ligger inom respektive intervall kan inte båda övertäckas av ändligt många av mängderna $\mathbf{O}_i$ – annars skulle ju hela **M** övertäckas av ändligt många av de öppna mängderna.

Låt $[a_1, b_1]$ $[a_0\ b_0]$ vara ett (eller det) av dessa intervall som bara kan övertäckas med oändligt många av $\mathbf{O}_i$:na. Upprepning av halveringsförfarandet på intervallet $[a_1, b_1]$ ger ett intervall

$$[a_2\ b_2] \quad [a_1, b_1] \quad [a_0, b_0]\ .$$

Detta förfarande kan upprepas hur många gånger som helst och man får en följd av intervall

$$\ldots \quad [a_m\ b_m] \quad \ldots \quad [a_2\ b_2] \quad [a_1, b_1] \quad [a_0, b_0]\ .$$

som alla innehåller delar av **M** som inte kan övertäckas av ändligt många av $\mathbf{O}_i$:na och som har längderna $(b_0 - a_0)/2^m$.

Intervallinkapslingsegenskapen hos **R** säger nu att det finns ett tal x som ligger i alla dessa intervall. Varje omgivning till x måste då innehålla något (i själva verket oändligt många) av intervallen $[a_m\ b_m]$. Detta intervall innehåller säkert någon punkt från **M**. Punkten x kan alltså inte vara yttre punkt till **M**, vilket, eftersom **M** är sluten, innebär att x **M**.

Men detta medför att x någon av de öppna mängderna $\mathbf{O}_i$. Denna innehåller någon omgivning till x, en omgivning som i sin tur måste innehålla något av intervallen $[a_m\ b_m]$. (Välj nämligen m så att $(b_0 - a_0)/2^m$. < omgivningen radie.). Dett ger att $[a_m\ b_m]$.och även den del av **M** som ligger inom intervallet omfattas av *en* av de öppna mängderna trots att vi visste att denna del av **M** inte kunde övertäckas av ens ändligt många av $\mathbf{O}_i$:na. Motsägelse! Varje sluten och begränsad del av **R** är alltså kompakt.

---

2 Rita figur!

Övningar:

L8.1 Verifiera att om

$$\mathbf{M}_1 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2\,;\, x \geq 0 \quad y > 0\}$$

så utgörs de inre punkterna av:

$$\mathbf{M}_2 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2\,;\, x > 0 \quad y > 0\}$$

och randpunkterna av de icke-negativa halvaxlarna:

$$\mathbf{M}_3 = \{(x,0) \quad \mathbf{R}^2;\, x \geq 0\,\} \qquad \{(0,y) \quad \mathbf{R}^2;\, y \geq 0\}$$

Rita figur!

L8..2 Verifiera att för mängderna i övning 8.1 ovan är

$\mathbf{M}_2$ öppen

$\mathbf{M}_3$ sluten och

$\mathbf{M}_1$ varken öppen eller sluten!

L8.3 Visa att mängden av randpunkter till en delmängd **M** till ett metriskt rum alltid är sluten.

L8.4 Verifiera att

$\mathbf{M}_4 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2\,;\, 1 \leq xy \leq 2,\, x \geq 0\}$ är sluten men obegränsad,

$\mathbf{M}_5 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2\,;\, 0 < x\,,\, 0 \leq y\,,\, x + y \leq 1\}$ är begränsad men inte kompakt och

$\mathbf{M}_6 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2\,;\, 0 \leq x\,,\, 0 \leq y\,,\, x + y \leq 1\}$ är kompakt!

L8.5 Vilka är de öppna respektive slutna mängderna i det metriska rum som man får då $\mathbf{R}^2$ förses med den diskreta metriken definierad i ex 8.3? Vilka är de begränsade mängderna? Vilka följder i detta metriska rum är konvergenta?

L8.6 Hur ser ”enhetsskivorna” $\{\boldsymbol{x} \quad \mathbf{R}^2;\, d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \leq 1\}$, dvs–motsvarigheten till enhetscirkeln,ut för de båda metrikerna som beskrivs i exemplen 8.4. och 8.5 ovan. Rita!

L8.7 Om $\mathbf{R}^2$ förses med metrikerna som beskrivs i exemplen 8.1, 8.4 och 8.5 ovan så får man tre olika metriska rum. Verfiera att trots detta klasserna av öppna mängder, slutna mängder, respektive begränsade mängder är desamma i alla tre fallen. Verifiera också att om

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$$

med avseende på en av dessa metriker, så gäller detsamma med avseende de andra två metrikerna.

En *norm* i ett linjärt **E** är en funktion $|\cdot|$ av typen $\mathbf{E} \to \mathbf{R}$, som uppfyller

N1: $|\boldsymbol{x}| > 0$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ och $= 0$ för $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

N2. $|\lambda \boldsymbol{x}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{x}|$ för alla skalärer λ och alla vektorer $\boldsymbol{x}$,

N3. $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ för alla vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$

L8.8 Verifiera att funktionerna $d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ i exemplen 8.1, 8.4 och 8.5 är normer på vektorrummet $\mathbf{R}^2$.

L8.9 Verifiera att om $|\cdot|$ är en norm på vektorrummet **E**, så är $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ en metrik på rummet.

L.8.10 Låt $(\mathbf{E}, d)$ vara ett godtyckligt metriskt rum. Verifiera att p är en hopningspunkt till delmängden **M** om och endast om p är randpunkt till $\mathbf{M} - \{p\}$.

Rosenlicht, kap 3 (sid 64): Uppg 26, 30, 32