5B1493, lekt 9

Kontinuerliga funktioner (Rosenlicht kap 4 § 1 - 3

E och **E'** nedan står för metriska rum

Kontinuitet i en punkt: (sid 68)

En funktion f av typ $\mathbf{E} \to \mathbf{E'}$ är *kontinuerlig i punkten* p_0 om
det till varje ε > 0 finns ett δ(ε) > 0 sådant att

$$d(p, p_0) < \delta \qquad d'(f(p), f(p_0)) < \varepsilon$$

Alternativt uttryckssätt:

Om det till varje omgivning **O'** till $f(p_0)$ finns en omgivning **O** till p_0 sådan att $f^{-1}(\mathbf{O'})$ O.

Ekvivalent med detta är: (prop sid 74)

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p_0 \qquad \lim_{n \to \infty} f(p_n) = f(p_0)$$

Kontinuerlig funktion :

En funktion f av typ $\mathbf{E} \to \mathbf{E'}$ är *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i alla p **E**.

Ekvivalent med detta är (prop sid 70)

Om **M'** **E'** är öppen så är $f^{-1}(\mathbf{M'})$ **E** öppen.

och även:

För alla p **E** gäller att $\lim_{n \to \infty} p_n = p \qquad \lim_{n \to \infty} f(p_n) = f(p)$

Gränsvärde av funktion. (§2)

Om p_0 är en hopningspunkt i **E** och funktionen

$$F(p) = \begin{cases} f(p), & \text{då } p \neq p_0, \\ q, & \text{då } p = p_0 \end{cases}$$

är kontinuerlig, så säger man att *f har gränsvärdet q då p går mot* p_0 och skriver

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = q.$$

Obs! Om f eventuellt skulle vara definierat för $p = p_0$, så behöver $f(p_0)$ inte vara = q!

Ekvivalent med detta är:

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p_0 \text{ och } p_n \neq p_0 \text{ för alla } n \qquad \lim_{n \to \infty} f(p_n) = q$$

och även:

Till varje ε > 0 finns ett δ(ε) > 0 sådant att

$$0 < d(p, p_0) < \delta \qquad d'(f(p), q) < \varepsilon$$

Sammansättning av funktioner (sid 71-72)

f och g kontinuerliga och sammansättbara $f \circ g$ kontinuerlig

För reellvärda funktioner: (§3)

$$\lim_{p \to p_0} f(p) \pm \lim_{p \to p_0} g(p) = \lim_{p \to p_0} \big(f(p) \pm g(p)\big) \text{ och } \lim_{p \to p_0} f(p) \cdot \lim_{p \to p_0} g(p) = \lim_{p \to p_0} \big(f(p) \cdot g(p)\big).$$

Om $g(p) \neq 0$ i en omgivning av p_0 och $\lim_{p \to p_0} g(p) \neq 0$,

$$\lim_{p \to p_0} f(p) \;/\; \lim_{p \to p_0} g(p) = \lim_{p \to p_0} \big(f(p) / g(p)\big)$$

Övningar:

L9.1 För varje $p_0 \in \mathbf{E}$ är funktionen $p \to d(p, p_0)$ av typen $\mathbf{E} \to \mathbf{R}$. Verifiera att den är kontinuerlig.

L9.2 Låt $\mathbf{E}$ och $\mathbf{E'}$ vara metriska rum. Verifiera att $\mathbf{E} \times \mathbf{E'}$ är ett metriskt rum om metriken D definieras av

$$D\big((p, p'), (q, q')\big) = d(p, q) + d'(p', q')$$

L9.3 Verifiera att $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \ni (p, q) \to d(p, q) \in \mathbf{R}$ är en kontinuerlig funktion om $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ görs till ett metriskt rum som i uppgift 9.2

L9.4 Ge exempel på en funktion f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sådan att

a. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)\right)$ och $\lim\limits_{y \to 0}\left(\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)\right)$ existerar men är olika.

b. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)\right)$ och $\lim\limits_{y \to 0}\left(\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)\right)$ existerar och är lika, men att

$\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ inte existerar.

L9.5 Låt f vara följande reellvärda funktion av två reella variabler:

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \dfrac{1}{x}, & \text{då } x \neq 0, \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Vad gäller om gränsvärdena

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x, y)\right), \quad \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x, y)\right) \text{ respektive } \lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)?$$

Ytterligare uppgifter: Rosenlicht kap 4: 1, 2, 9, 10.