Lösningsskisser, Tenta för 5B1493, 070310

1. Irrationellt reellt tal: Reellt tal som inte $= \frac{p}{q}$ där p och q är heltal.

Ett exempel är $\sqrt{2}$. Bevis för irrationaliteten:

Antag att $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ där p och q heltal. Genom eventuell förkortning kan man se till att båda inte är jämna. Kvadrering och omformning $\Rightarrow 2q^2 = p^2$. Eftersom V.L. är jämnt är också $H.L = p^2$ jämnt. Men kvadraten på udda tal är udda, så p måste vara jämnt $= 2r$, $r \in \mathbb{Z}$. Men då är $2q^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2$, dvs q också jämnt. Motsägelsen visar att $\sqrt{2}$ inte kan vara rationellt.

---

2. Induktionsbevis för att utsagan $a \neq a^+$ är sann för alla $a \in \mathbb{N}$:

1. För $a=0$: Utsagan $0 \neq 0^+$ sann enligt P4.
2. Anta utsagan sann för $a = a_0$; $a_0 \neq a_0^+$. Vi vill visa att den då också är sann för a_0^+, dvs att $a_0^+ \neq (a_0^+)^+$. Men motsatsen $a_0^+ = a_0^{++}$ skulle enligt P3 innebära att $a_0 = a_0^+$, vilket inte var sant. Alltså är $a_0^+ \neq a_0^{++}$ sant.
3. 1, 2, och P5 visar att utsagan $a \neq a^+$ är sann för alla $a \in \mathbb{N}$.

---

3. Villkoren (1) och (2):

$d(x,y) = \ln(1+|x-y|) \geq \ln 1 = 0$ med likhet om och endast om $|x-y| = 0$ dvs $x=y$. (Här använder vi att $t \to \ln(1+t)$ är en växande funktion av t.)

Villkoret (3):

$d(x,y) = \ln(1+|x-y|) = d(y,x)$ eftersom $|x-y| = |y-x|$.

Villkoret (4):

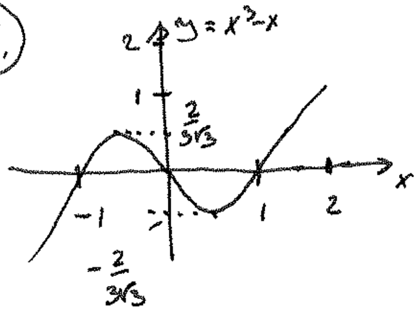
$$d(x,z) + d(z,y) - d(x,y) = \ln(1+|x-z|) + \ln(1+|y-z|) - \ln(1+|x-y|) =$$

$$= \ln \frac{(1+|x-z|)(1+|y-z|)}{1+|x-y|} = \ln \frac{1+|x-z|+|y-z|+|x-z||y-z|}{1+|x-y|} \geq \left[\begin{array}{l} |x-z|+|y-z| \geq |x-y| \\ \text{med likhet omm} \\ z \text{ mellan } x \text{ och } y \end{array} \right]$$

$$\geq \ln \frac{1+|x-y|+|x-z|\cdot|y-z|}{1+|x-y|} \geq \left[\begin{array}{l} \text{Likhet omm} \\ |x-z||y-z| = 0 \\ \text{dvs. } x=z \text{ eller } y=z \end{array} \right] \geq \ln 1 = 0$$

Triangelolikheten är alltså uppfylld och likhet gäller om och endast om $x=z$ eller $y=z$.

(4.)



A_1 kompakt $\Rightarrow$ $f(A_1)$ kompakt (och alltså sluten)
eftersom f kontinuerlig.

$f(A_2) = f(A_1) \left(= \left[-\frac{2}{3\sqrt3}, \frac{2}{3\sqrt3}\right]\right)$ också kompakt.

$f(A_3)$: $f(x)$ växande för $x \geq 2 \Rightarrow f(A_3) = (6, \infty)$
vilket är ett öppet intervall.

Eftersom f är kontinuerlig så är $f^{-1}(A_1)$ och $f^{-1}(A_2)$ sluten resp. öppen, eftersom A_1 resp A_2 är motsvarande. $f^{-1}(A_1)$ är dessutom begränsad (t.ex. ca $x = \pm 2$) så $f^{-1}(A_1)$ är kompakt. $f^{-1}(A_3)$ är öppen eftersom A_3 är öppen.

Svar: $f(A_1)$ och $f(A_2)$ kompakta (och slutna). $f(A_3)$ öppen
$f^{-1}(A_1)$ kompakt (och sluten) $f^{-1}(A_2)$ och $f^{-1}(A_3)$ öppna

---

(5.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & |x|<1, & \text{ty } \lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0 \\ 1/2 & |x| = 1, & \text{ty } x^{2n} = 1 \\ 0 & |x|>1, & \text{ty } \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \infty \end{array} \right\} = f(x).$$

Funktionerna $f_n(x)$ är kontinuerliga på $\mathbb{R}$ medan $f(x)$ inte är det (diskont i $x = \pm 1$), så konvergensen kan inte vara likformig på $\mathbb{R}$.
På intervallet $|x| \leq a < 1$ gäller:

$$\max_{|x|\leq a<1} |f_n(x) - f(x)| = \max_{|x|\leq a<1} \left| \frac{1}{1+x^{2n}} - 1 \right| = \max_{|x|\leq a<1} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \left[\begin{array}{l} \text{max då} \\ x = a \end{array} \right] =$$

$$= \frac{a^{2n}}{1+a^{2n}} \to 0 \text{ då } n\to\infty;$$ Konvergensen är alltså likformig i $|x| \leq a < 1$.

På intervallet $x \geq b > 1$:

$$\max_{x\geq b>1} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\geq b>1} \left| \frac{1}{1+x^{2n}} - 0 \right| = \left[\begin{array}{l} \text{max då} \\ x = b \end{array} \right] = \frac{1}{1+b^{2n}} \to 0 \text{ då } n\to\infty$$

Konvergensen är alltså likformig i $x \geq b > 1$.

(6.) $\bar{F}: \begin{cases} xe^{y} + ye^{z} + ze^{2x} = 0 \\ 2xe^{z} + 3ze^{y} + 2ye^{x} = 0 \end{cases}$; Systemet satisfieras av $(0,0,0)$ så origo är en gemensam punkt för ytorna.

$$\frac{d\bar{F}}{d(x,y,z)} = \begin{pmatrix} e^{y}+2ze^{2x} & xe^{y}+e^{z} & ye^{z}+e^{2x} \\ 2e^{z}+2ye^{x} & 3ze^{y}+2e^{x} & 2xe^{z}+3e^{y} \end{pmatrix}$$

För $(x,y,z) = (0,0,0)$:

$$\frac{d\bar{F}}{d(x,y,z)}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Här ser man exempelvis att $\frac{\partial F}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ är inverterbar.

Implicita funktionssatsen garanterar då att det finns differentiabla funktioner $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ för vilka $\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$, dvs. $(x, y(x), z(x))$ är en differentiabel
i en omg. av $x = 0$

skärningskurva mellan ytorna.

För derivatorna gäller då

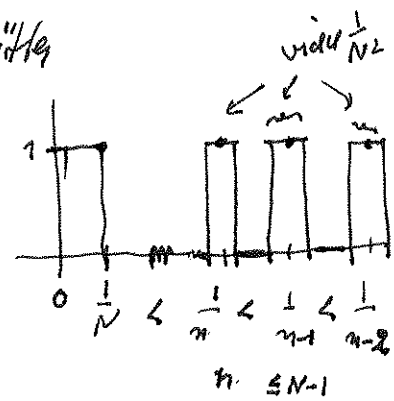
$$\begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = \frac{d(y,z)}{dx} = -\left[\frac{\partial F}{\partial(y,z)}\right]^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och kurvans tangentriktning $(x, y(x), z(x))'\big|_{x=0} = (1, y'(0), z'(0)) = \underline{\underline{(1,-1,0)}}$

(7.) Välj som underfunktion $\psi(x) = 0 \leq f(x)$ för alla x. Låt $\varepsilon > 0$.

Låt $\varphi_N(x)$ vara den överfunktion man får då man sätter

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{N} \text{ eller } |x - \frac{1}{n}| < \frac{1}{2N^2} \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \\ 0, & \text{för alla andra } x. \end{cases}$$



Då är $\int_0^1 \varphi_N(x) - \psi(x)\, dx = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2}(N-1) = \frac{2}{N} - \frac{1}{N^2} < \frac{2}{N} < \varepsilon$

om $N > \frac{2}{\varepsilon}$. Enligt kriteriet är f då Riemannintegrerbar.

8. Eftersom x och $y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}_+$ och multiplikation är associativ, kommutativ samt att talet $1 \in \mathbb{R}_+$ och för alla $x \in \mathbb{R}_+$ har egenskapen $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ och $1/x \in \mathbb{R}_+$, där $x \cdot 1/x = 1$, så är $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ en abelsk grupp.
Likaså: Eftersom x och $y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}$ och addition är associativ, kommutativ samt att talet $0 \in \mathbb{R}$ för alla $x \in \mathbb{R}$ har egenskapen $0 + x = x + 0 = x$ och att $-x \in \mathbb{R}$ om $x \in \mathbb{R}$, där $x + (-x) = 0$, så är $(\mathbb{R}, +)$ en abelsk grupp.

Funktionen $\varphi(x) = e^x$ (ex-vis) är en isomorfi $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$ ty

I. e^x är en bijektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ (invers är $\varphi^{-1}(x) = \ln x$),

II. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{addition i } \mathbb{R}}}{\varphi(x+y)} = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplikation i } \mathbb{R}_+}}{\varphi(x) \cdot \varphi(y)}$.

$(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ och $(\mathbb{Q}, +)$ är abelska grupper av samma skäl som att $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ och $(\mathbb{R}, +)$ är det, men de är inte isomorfa. Obs t.ex. att ekvationen $x + x = a$ är lösbar i $\mathbb{Q}$ för alla $a \in \mathbb{Q}$, av $x = \frac{1}{2} \cdot a \in \mathbb{Q}$ nämligen, medan t.ex. ekvationen $y \cdot y = 2 \in \mathbb{Q}_+$ inte har några lösningar $y \in \mathbb{Q}_+$. (Talet $\sqrt{2}$ är ju inte rationellt - se uppgift 1:s lösning). Skulle det finnas en isomorfi $(\mathbb{Q}, +) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{Q}^+, \cdot)$, så skulle

$$y \cdot y = 2 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y \cdot y) = \varphi^{-1}(2) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(2) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = \frac{1}{2} \cdot \varphi^{-1}(2) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y = \varphi\left(\frac{1}{2}\varphi^{-1}(2)\right) \in \mathbb{Q}_+,$$ vilket motsäger att $y \notin \mathbb{Q}_+$.
