Lösningsskisser, tentamen 070612, Matematik fördjupning, 5B1493

(1.) Vi vet att $\sqrt{2}$ är irrationellt.

$\underline{x+\sqrt{2}}$ kan vara rationellt (t.ex om $x=-\sqrt{2}$, så är $x+\sqrt{2}=0$, som är rationellt),

men kan också vara irrationellt (t.ex $x=\sqrt{2}$, så är $x+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ som inte kan skrivas på formen $\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$ eftersom i annat fall $\sqrt{2}=\frac{p}{2q}$ och $\sqrt{2}$ skulle vara rationellt).

$\underline{x+1}$ kan inte vara rationellt, ty om $x+1=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$

så är $x=\frac{p}{q}-1=\frac{p-q}{q}$ där $p-q$ och $q\in\mathbb{Z}$, och därmed skulle x vara rationellt.

$\underline{2x}$ kan inte heller vara rationellt, ty om $2x=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, så skulle $x=\frac{p}{2q}$, där p och $2q\in\mathbb{Z}$, och därmed skulle x vara rationellt.

$\sqrt{2}x$ kan vara rationellt (t.ex om $x=\sqrt{2}$, då är $\sqrt{2}x=2\in\mathbb{Q}$) men kan också vara irrationellt (t.ex om $x=\sqrt{2}+1$, som är irrationellt enligt ovan, så är $\sqrt{2}x=2+\sqrt{2}$ irrationellt av samma skäl).

Svar: $x+1$ och $2x$ måste vara irrationella. Om $x+\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}x$ kan inget sägas beträffande rationalitet/irrationalitet.

(2.) P1. är uppfyllt: $0\in M$

P2. är uppfyllt: (per def av $^+$)

P3 är uppfyllt: $n^+=m^+ \Rightarrow n+2=m+2 \Rightarrow n=m$

P4 är uppfyllt: $n^+=n+2\geq 2$ för alla $n\in M \Rightarrow n^+\neq 0$ för alla $n\in M$

P5 är inte uppfyllt: Ex. vis är utsagan $P(n)$ = "n är ett jämnt tal" sann för $n=0$ och om $P(n)$ sann, dvs n är ett jämnt tal så är $n+2$ är ett jämnt tal, dvs. $P(n^+)$ är sann.

Men trots detta är $P(n)$ inte sann för alla $n\in M$, ex vis $P(1)$ = "1 är ett jämnt tal" är ett falskt påstående.

Svar: P1–4 gäller, P5 gäller inte.

(3) $d_1(x,y) = \sqrt{|x-y|} \geq 0$ | $d_2(x,y) = (x-y)^2 \geq 0$

$d_1(x,y) = 0 \iff \sqrt{|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$ | $d_2(x,y) = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y$

dvs. (1) och (2) är uppfyllda i båda fallen

$d_1(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d_1(y,x)$ | $d_2(x,y) = (x-y)^2 = (-(y-x))^2 = (y-x)^2 = d_2(y,x)$

dvs. (3) är uppfyllt i båda fallen

$$d_1(x,z) + d_1(z,y) = \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \geq$$

$$\geq \left[\begin{array}{l} \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \text{ om } a \text{ och } b \geq 0, \\ \text{ty denna olikhet är ekvivalent med} \\ \text{den kvadrerade} \\ a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq a+b \\ \iff 2\sqrt{ab} \geq 0, \text{ som är sann} \end{array} \right] \geq \sqrt{|x-z|+|z-y|} \geq$$

$$\geq \left[\begin{array}{l} \text{Triangelolikheten} \\ \text{för beloppet } |\cdot| \end{array} \right] \geq \sqrt{|x-y|} = d_1(x,y)$$

d_1 är alltså en metrik

$$d_2(x,z) + d_2(z,y) = \left[\begin{array}{l} \text{För t.ex. } x=1 \\ z=0,\ y=-1 \end{array} \right] = 1^2 + 1^2 = 2$$

men $d_2(x,y) = d(1,-1) = (1-(-1))^2 = 4 > 2 = d_2(x,z) + d_2(z,y)$

Triangelolikheten är inte uppfylld för d_2

Svar: d_1 är en metrik, men inte d_2

(4) (a.)

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \overset{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} \text{För varje } \varepsilon>0 \text{ finns ett tal } \delta(\varepsilon)>0 \\ \text{sådant att} \\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon. \end{cases}$$

(b.) Med $f(x)=x^4$, $a=2$ och $A=16$ får man för givet $\varepsilon>0$:

$$|f(x)-f(a)| = |x^4-16| = |x-2|\cdot|x+2|\cdot|x^2+4| <$$

$$< \left[\begin{array}{l} 0<|x-2|<\delta \\ \text{om } \delta<2 \\ (\text{då är } x>0) \end{array}\right] < \delta\cdot 2\cdot 4 \text{ som är } <\varepsilon \text{ om } \delta \text{ dessutom } < \frac{\varepsilon}{8}$$

Alltså om $\delta < \min\left(2, \frac{\varepsilon}{8}\right)$, så är $|x^4-16|<\varepsilon$ om $|x-2|<\delta$

V.S.B.

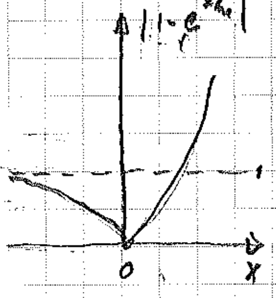
(5.)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{x/n} = \left[\begin{array}{c} e^t \text{ kontinuerlig} \\ \text{funktion} \end{array}\right] =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}} = e^0 = 1 \quad \text{för alla } x\in\mathbb{R}.$$

För att undersöka om konvergensen är likformig på intervallet

I] $\{x;\, x\le 0\}$ undersöker vi



$$M(n) = \sup_{x\le 0} |e^{x/n}-1| = \left[\tfrac{x}{n}\le 0 \iff e^{x/n}-1\le 0\right] =$$

$$= \sup_{x\le 0}\left(1-e^{x/n}\right) = \left[\begin{array}{c} 1-e^{x/n} \text{ avtagande} \\ \text{funktion av } x \end{array}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(1-e^{x/n}\right) = 1$$

$\not\to 0$ då $n\to\infty$.

Konvergensen är alltså inte likformig

II] $\{x;\, |x|<a\}$ undersöker vi

$$M(n) = \sup_{|x|\le a} |e^{x/n}-1| = \left[\begin{array}{l} |e^{x/n}-1| \text{ avtagande för} \\ x\le 0 \text{ och växande för} \\ x\ge 0 \end{array}\right] =$$

$=$ det största av talen $e^{a/n}-1$ och $1-e^{-a/n}$

Eftersom både $e^{a/n}-1$ och $1-e^{-a/n} \to 1-1=0$ då $n\to\infty$, så är konvergensen likformig.

Svar: Ej likformig då $x\le 0$, likformig då $|x|\le a$.

6. Enligt implicita funktionsatsen, med $m = n = 1$

$$F(x,y) = x^3 + xy^2 + y^3 - 31$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + 3y^2 \quad \left(= \det \frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

Så har vi för $a = 3$ och $b = 1$:

$$F(a,b) = 27 + 3 + 1 - 31 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 = 9 \neq 0$$

Det finns alltså en deriverbar funktion med egenskaperna

- definierad i en omgivning av $x = 3$
- satisfierar $x^3 + xf^2 + f^3 - 31 = 0$
- $f(3) = 1$. Svaret är alltså ja beträffande f-funktionen.

Om det skulle finnas en deriverbar funktion $g(x)$ med $g(3) = -2$ som satisfierar ekvationen

$$x^3 + x\,g^2(x) + g^3(x) = 31$$

Så skulle derivering ge:

$$3x^2 + g^2(x) + 2x\,g(x)\cdot g'(x) + 3g^2(x)\cdot g'(x) = 0$$

För $x = 3$ får man då

$$27 + 4 + \left(6(-2) + 3(-2)^2\right) g'(3) = 0,$$

dvs. den omöjliga likheten $31 = 0$.
Det kan alltså inte finnas någon sådan funktion.

<u>Svar</u>: Det finns en funktion med f:s egenskaper, men inte någon med g:s.

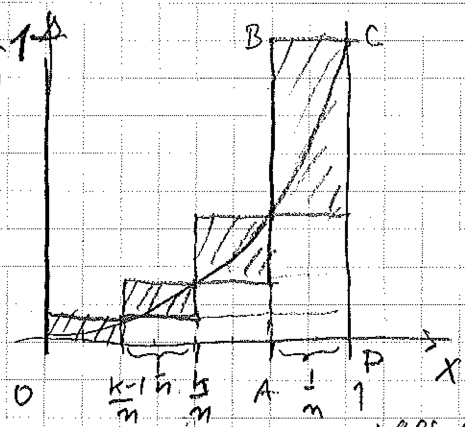
---

7. Låt $\varepsilon > 0$ och låt n heltal ≥ 1. Dela in intervallet $0 \leq x \leq 1$ i n lika delar $\frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. och låt

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \quad \text{samt} \quad \psi_n(x) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$

Eftersom $f(x) = x^2$ är växande så är $\varphi(x)$ och $\psi(x)$ över- resp. underfunktioner till x^2 i intervallet $[0,1]$

7.fa(b)



Värdet av $\int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} (\varphi_n(x) - \psi_n(x))\,dx$ motsvara arean av en skrafferad rektangel i fig. och integralen över hela intervallet $[0,1]$ ges av summan av dessa rektangelareor. Rektanglarna kan dock utan överlappning skjutas in i rektangeln ABCD så att de täcker denna. ABCD:s area $= \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}$

Alltså $\int_0^1 (\varphi_n(x) - \psi_n(x))\,dx = \frac{1}{n} < \varepsilon$ om $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Vi kan alltså till varje $\varepsilon > 0$ hitta över- och underfunktioner till $f(x) = x^2$, av det slag kriteriet för integrerbarhet kräver. Funktionen är därmed integrerbar över intervallet $[0,1]$

Anmärkning: Utredningen angående värdet av $\int_0^1 (\varphi_n(x) - \psi_n(x))\,dx$ kan också göras analytiskt:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (\varphi_n(x) - \psi_n(x))\,dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2}\right) dx = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^3}$$

$$\int_0^1 (\varphi_n(x) - \psi_n(x))\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (\varphi_n(x) - \psi_n(x))\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left((1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \dots + (n^2 - (n-1)^2) \right) = \frac{1}{n^3} \cdot n^2 = \frac{1}{n}$$

tar ut varandra!

8. a. $a \in \mathbb{R}$ och $b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}$

"Summan av två reella tal är ett reellt tal"

I $(a+b)+c = a+(b+c)$; associativa lagen gäller för addition,

II $0 \in \mathbb{R}$ och $0+a = a+0 = a$ är sant för alla reella a,

III $a+(-a) = (-a)+a = 0$ är sant för alla reella a.

Alltså $(\mathbb{R},+)$ är en grupp

b. Det "enhetselement" som egenskapen II beskriver måste vara talet 1 (ty om $z \cdot a = a \cdot z = a$ för alla $a \in \mathbb{R}$, så medför detta – sätt $a=1$ – att $z=1$).

Egenskapen III kan då inte uppfyllas eftersom ekvationen $x \cdot 0 = 1$ inte har någon lösning för $x \in \mathbb{R}$ (0 saknar invers)

Alltså $(\mathbb{R},\cdot)$ är ingen grupp

c. Obs: $a \in \mathbb{R}-\{0\}$ och $b \in \mathbb{R}-\{0\} \not\Rightarrow a+b \in \mathbb{R}-\{0\}$

"Summan av två reella tal $\neq 0$ behöver inte vara $\neq 0$". (Ex: $1+(-1)=0$).

Alltså $(\mathbb{R}-\{0\},+)$ är inte någon grupp.

d. $a \in \mathbb{R}-\{0\}$ och $b \in \mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}-\{0\}$

"Produkten av två reella tal $\neq 0$ är ett reellt tal $\neq 0$"

I $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$: associativa lagen gäller för multiplikation

II $1 \in \mathbb{R}-\{0\}$ och $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ är sant för alla $a \in \mathbb{R}-\{0\}$

III "För varje $a \in \mathbb{R}-\{0\}$ finns ett tal $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}-\{0\}$ för vilket $\frac{1}{a} \cdot a = a \cdot \frac{1}{a} = 1$" är ett sant påstående.

Svar: $(\mathbb{R},+)$ och $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ är grupper de andra båda inte.