Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen för 5B1493, Matematik, fördjupning för CL, 06/07
den 10 mars 2007, kl 8.00 – 13.00

Inga hjälpmedel: Bifogat PM.

Fordringar inklusive bonuspoäng från kursen: Betyget 3, 12 – 15p; betyget 4: 16 – 20; betyget 5: ≥ 21p.
Rätt till komplettering vid 10 – 11p.

Skriv Din e-postadress på omslaget.

1. Definiera vad som menas med ett irrationellt reellt tal. Ge exempel på ett sådant och visa att ditt exempel verkligen är irrationellt. (3p)

2. Visa utifrån Peanos axiom att $a \neq a^+$ för alla a $\mathbf{N}$. (3p)

3. Definiera för reella x och y, $d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$. Visa att d utgör en metrik på $\mathbf{R}$. När gäller likhet i triangelolikheten? (3p)

4. Låt $f(x) = x^3 - x$ och låt
   $\mathbf{A}_1 = \{x \quad \mathbf{R}; -1 \leq x \leq 1\}$,
   $\mathbf{A}_2 = \{x \quad \mathbf{R}; -1 < x < 1\}$,
   $\mathbf{A}_3 = \{x \quad \mathbf{R}; 2 < x\}$.
   Vad kan sägas om öppenhet, slutenhet, kompakthet hos mängderna $f(\mathbf{A}_k)$ och $f^{-1}(\mathbf{A}_k)$, $k = 1, 2, 3$.
   Motivera dina svar. (3p)

5. Låt $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^{2n}}, x \quad \mathbf{R}$.
   Bestäm $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. Är konvergensen likformig på $\mathbf{R}$?
   Är den likformig på $\{x; |x| \leq a\}$, där a en konstant i intervallet $0 < a < 1$?
   På $\{x; x \geq b\}$, där b en konstant > 1?
   Motivera svaren. (3p)

6. Två ytor i $\mathbf{R}^3$ har ekvationerna
   $$x\,e^y + y\,e^z + z\,e^{2x} = 0$$
   respektive
   $$2x\,e^z + 3z\,e^y + 2y\,e^x = 0.$$
   Visa att dessa båda ytor skär varandra längs en deriverbar kurva som går genom punkten (0, 0, 0) och bestäm kurvans tangentriktning i den punkten. (3p)

7. Använd kriteriet för integrerbarhet i bifogat PM för att visa att funktionen
   $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x = \dfrac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{för övriga } x \quad \mathbf{R}, \end{cases}$$
   är Riemannintegrerbar i intervallet [0, 1]. (3p)

8. Verifiera att de positiva reella talen $\mathbf{R}_+$ med räknesättet multiplikation och likaså att samtliga reella tal $\mathbf{R}$ med räknesättet addition, bildar var sin abelsk grupp. Visa att dessa grupper är isomorfa, dvs. ange en bijektion $\phi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ sådan att $\phi(x + y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$.

   Om $\mathbf{R}_+$ och $\mathbf{R}$ ersätts med $\mathbf{Q}_+$ resp $\mathbf{Q}$ kommer då motsvarande grupper då att vara isomorfa? Motivera ditt svar. (4p)

Lycka till!

Institutionen för Matematik
KTH

PM för tentamen 070310, 5B1493

Peanos axiomsystem för de naturliga talen

P1. Det finns ett naturligt tal 0.

P2. Varje natutligt tal n har en s.k. efterföljare n^+.

P3. Om $n^+ = m^+$ så är $n = m$.

P4. Inget naturligt tal har 0 som efterföljare.

P5. Om man vet om en utsaga om naturliga tal att
I. den är sann för talet 0 och
II. den är sann för n^+ om den är sann för n,
så är utsagan sann för alla naturliga tal.
(Induktionsaxiomet)

Grupper

En mängd **M**, försedd med ett räknesätt, här skrivet   , (dvs. en funktion $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$), sådant att

I. $(a\ \ \ b)\ \ \ c = a\ \ \ (b\ \ \ c)$ för alla a, b och c **M**, (Associativitet)

II. det finns ett speciellt element i **M**, vi kallar det här 1, sådant att
$1\ \ \ a = a\ \ \ 1 = a$ för alla a **M**, (Existens av enhet)

III. till varje a **M** finns ett *inverst* element, vi skriver a^{-1}, sådant att
$a^{-1}\ \ \ a = a\ \ \ a^{-1} = 1$. (Existens av invers)

kallas en *grupp*.

Om dessutom
IV. $a\ \ \ b = b\ \ \ a$ för alla a och b **M**, (Kommutativitet)
så säger man att gruppen är *kommutativ* eller *abelsk.*

Metriska rum

En *metrik* på en mängd **E** är en funktion d: $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ sådan att för alla p, q och r **E**,

(1) $d(p, q) > 0$ om $p \neq q$,

(2) $d(p, p) = 0$,

(3) $d(p, q) = d(q, p)$,

(4) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ (Triangelolikheten)

Kriterium för likformig konvergens av funktionsföljder.

Om $f_n(p)$ är en följd av funktioner mellan metriska rum $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ och $f_n \to f$, så är konvergensen likformig på delmängden $\mathbf{G} \subset \mathbf{E}$ om och endast om

$$M(n) = \sup_{p \in \mathbf{G}} \text{ (eller förekommande fall } \max_{p \in \mathbf{G}} \text{)} \; d(f_n(p), f(p)) \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

Kriterium för Riemannintegrerbarhet

En funktion f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ är Riemannintegrerbar om och endast om det till varje $\varepsilon > 0$ finns en sträckvis konstant ”överfunktion” ϕ och en sträckvis konstant ”underfunktion” ψ sådana att

$$\psi(x) \le f(x) \le \phi(x) \text{ för alla } x \in [a, b]$$

och

$$\int_a^b (\phi(x) - \psi(x))\, dx < \varepsilon.$$

(En funktion g är *sträckvis konstant* på ett intervall $[a, b]$ om intervallet kan indelas i ett *ändligt antal* delintervall $a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_{N-1} < x_N = b$, sådana att g är konstant på varje sådant intervalls inre.)

Implicita funktionssatsen

Om $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ är en funktion av typ $\mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^n$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$) med kontinuerliga partiella derivator och punkten $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sådan att

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{0} \text{ och}$$
$$\det \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \right) (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0,$$

så finns i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ precis en funktion med kontinuerliga (partiella) derivator

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

för vilken

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

Funktionen $\boldsymbol{f}$ är differentierbar och

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = -\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{y}} \right)^{-1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}.$$