Institutionen för Matematik
KTH

**Tentamen för 5B1493, Matematik, fördjupning för CL, 06/07**
**den 12 juni 2007, kl 8.00 – 13.00**

Inga hjälpmedel: Bifogat PM.

Fordringar inklusive bonuspoäng från kursen: Betyget 3, 12 – 15p; betyget 4: 16 – 20; betyget 5: ≥ 21p.
Rätt till komplettering vid 10 – 11p.

Skriv Din e-postadress på omslaget.

1. Man får veta att talet $x$ är reellt men irrationellt. Vad kan sägas om de fyra talen
$$x + \sqrt{2}, \quad x + 1, \quad 2x, \quad \sqrt{2} \cdot x?$$
Är de rationella eller irrationella? Bevisa dina påståenden. (3p)

2. Låt $\mathbf{M} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ och definiera för varje $a \quad \mathbf{M}$ en ”efterföljare”, $a^+$, enligt
$$a^+ = a + 2.$$
Kommer $\{\mathbf{M}, {}^+\}$ då att uppfylla Peanos fem axiom? Om inte, vilket eller vilka av axiomen är det som inte gäller. Motivera dina påståenden! (3p)

3. Definiera för reella $x$ och $y$, $d_1(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ och $d_2(x, y) = (x - y)^2$.
Är $d_1$ och $d_2$ metriker på $\mathbf{R}$? Motivera ditt svar. (3p)

4. a. Låt $f(x)$ vara en funktion av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ samt $a$ och $A \quad \mathbf{R}$. Definiera vad som menas med att
$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \qquad (2p)$$
b. Utgående från definitionen som du gett i a.-uppgiften, visa att
$$\lim_{x \to 2} x^4 = 16.$$
(2p)

5. Låt
$$f_n(x) = e^{x/n} \quad x \quad \mathbf{R},\ n \quad \mathbf{N}.$$
Bestäm
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$
Är konvergensen likformig på intervallet $\{x \quad \mathbf{R};\ x \le 0\}$?
Är den likformig på $\{x \quad \mathbf{R};\ |x| \le a\}$, där $a$ en reell positiv konstant?
Motivera svaren. (3p)

6. Kurvan $x^3 + xy^2 + y^3 = 31$ går genom de båda punkterna (3, 1) och (3, –2).
Finns det några för $x = 3$ *deriverbara* funktioner $y = f(x)$ och $y = g(x)$ vars grafer är delar av kurvan och för vilka $f(3) = 1$ respektive $g(3) = -2$? (3p)

7. Använd kriteriet för integrerbarhet i bifogat PM för att visa att funktionen
$$f(x) = x^2$$
är Riemannintegrerbar i intervallet [0, 1]. (3p)

8. Nedan ges fyra mängder $\mathbf{M}$ som är försedda med specificerade räknesätt, . Vilka av dem bildar en grupp? Motivera dina svar.

a. $\mathbf{M} = \mathbf{R}$ och står för den vanliga additionen,

b. $\mathbf{M} = \mathbf{R}$ och står för den vanliga multiplikationen,

c. $\mathbf{M} = \mathbf{R} - \{0\}$ och står för den vanliga additionen,

d. $\mathbf{M} = \mathbf{R} - \{0\}$ och står för den vanliga multiplikationen, (4p)

*Lycka till!*

Institutionen för Matematik
KTH

# PM för tentamen 070612, 5B1493

## Peanos axiomsystem för de naturliga talen

**P1.** Det finns ett naturligt tal 0.

**P2.** Varje naturligt tal $n$ har en s.k. efterföljare $n^+$.

**P3.** Om $n^+ = m^+$ så är $n = m$.

**P4.** Inget naturligt tal har 0 som efterföljare.

**P5.** Om man vet om en utsaga om naturliga tal att
I. den är sann för talet 0 och
II. den är sann för $n^+$ om den är sann för $n$,
så är utsagan sann för alla naturliga tal.
(Induktionsaxiomet)

## Grupper

En mängd **M**, försedd med ett räknesätt, här skrivet , (dvs. en funktion $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$), sådant att

I. $(a \quad b) \quad c = a \quad (b \quad c)$ för alla $a, b$ och $c$ **M**, (Associativitet)

II. det finns ett speciellt element i **M**, vi kallar det här 1, sådant att
$1 \quad a = a \quad 1 = a$ för alla $a$ **M**, (Existens av enhet)

III. till varje $a$ **M** finns ett *inverst* element, vi skriver $a^{-1}$, sådant att
$a^{-1} \quad a = a \quad a^{-1} = 1.$ (Existens av invers)

kallas en *grupp*.

Om dessutom

IV. $a \quad b = b \quad a$ för alla $a$ och $b$ **M**, (Kommutativitet)

så säger man att gruppen är *kommutativ* eller *abelsk.*

## Metriska rum

En *metrik* på en mängd **E** är en funktion $d$: $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ sådan att för alla $p, q$ och $r$ **E**,

(1) $d(p, q) > 0$ om $p \neq q$,

(2) $d(p, p) = 0$,

(3) $d(p, q) = d(q, p)$,

(4) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ (Triangelolikheten)

## Kriterium för likformig konvergens av funktionsföljder.

Om $f_n(p)$ är en följd av funktioner mellan metriska rum $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ och $f_n \to f$, så är konvergensen likformig på delmängden $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{E}$ om och endast om

$$M(n) = \sup_{p \in \mathbf{G}} \text{ (eller förekommande fall } \max_{p \in \mathbf{G}} \text{) } d(f_n(p), f(p)) \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

## Kriterium för Riemannintegrerbarhet

En funktion $f$: $[a, b] \to \mathbf{R}$ är Riemannintegrerbar om och endast om det till varje $\varepsilon > 0$ finns en sträckvis konstant ”överfunktion” $\phi$ och en sträckvis konstant ”underfunktion” $\psi$ sådana att

$$\psi(x) \le f(x) \le \phi(x) \text{ för alla } x \in [a, b]$$

och

$$\int_a^b (\phi(x) - \psi(x))\, dx < \varepsilon.$$

(En funktion $g$ är *sträckvis konstant* på ett intervall $[a, b]$ om intervallet kan indelas i ett *ändligt antal* delintervall $a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_{N-1} < x_N = b$, sådana att $g$ är konstant på varje sådant intervalls inre.)

## Implicita funktionssatsen

Om $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ är en funktion av typ $\mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^n$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n)$ med kontinuerliga partiella derivator och punkten $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sådan att

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{0} \text{ och}$$

$$\det \left( \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \right)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0,$$

så finns i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ precis en funktion med kontinuerliga (partiella) derivator

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

för vilken

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

Funktionen $\boldsymbol{f}$ är differentierbar och

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{x}} = -\left( \frac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{y}} \right)^{-1} \frac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{x}}.$$