10. Approximation av fouriertransformer

(Hj kap 6)

10.1 Inledning

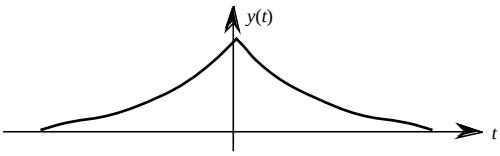
I en ideal tillvaro skulle fouriertransformen av en signal $y(t)$ som man vill studera kunna beräknas enligt sin definition:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt.$$

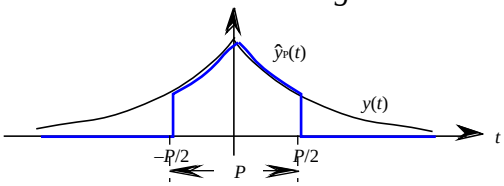
I realiteten är $y(t)$ nästan aldrig till fullo känd – dels kan man kanske inte iaktta signalen under hela sin varaktighet, dels detekteras signalen inte i kontinuerlig tid utan bara vid vissa sampeltidpunkter. Man behöver därför rent allmänt göra en analys hur dessa två inskränkningar (trunkering respektive sampling) påverkar möjligheterna att skaffa fram goda approximationer till $Y(f)$. Denna analys blir här i stor utsträckning heuristisk.

En översikt[1]

Exakta signalen:

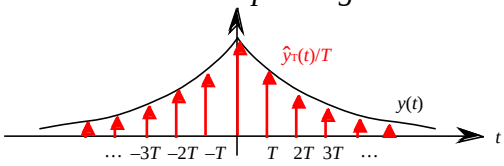


I. Trunkerad signal



$$y(t) \approx \hat{y}_P(t) = y(t) \cdot \mathrm{rect}_P(t)$$

II. Samplad signal

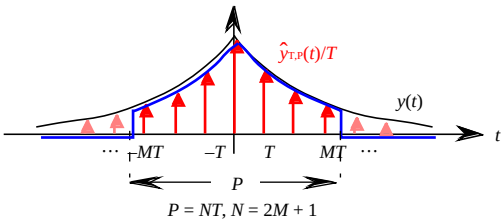


$$y(t) \approx \hat{y}_T(t) = y(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) =$$

$$= T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, \delta(t - nT), \text{ där } y[n] = y(nT).^{2}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

III. Trunkerad och samplad signal



$$y(t) \approx \hat{y}_{T,P}(t) = y(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^{M} \delta(t - nT) =$$

$$= T \cdot \sum_{n=-M}^{M} y[n]\, \delta(t - nT), \text{ där } y[n] = y(nT),$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm M.$$

---

1 *Anmärkning* angående beteckningarna: Här följs (de underförstådda) beteckningskonventionerna i Hj. Om någon signal (något spektrum) är en approximation (inte nödvändigtvis ”bra” sådan) till en signal (ett spektrum) markeras detta genom att en hatt, ˆ, sätts på funktionssymbolen för den exakta signalen (spektret). Approximationer där felet härrör från en trunkering förses med index $_P$, medan sådana som från samplingar med index $_T$. Approximationer som härrör från både trunkering och sampling dubbelindiceras, $_{T,P}$. Ex.vis: $\hat{y}_T(t)$ resp. $\hat{y}_{T,P}(t)$ är båda approximationer till $y(t)$ – i det första fallet härrör felen från en sampling enbart, i det andra från sampling och trukering.

2 För en motivering för faktorn T, se sid 54 i arb.matr 5.

För att kunna få en uppfattning om hur ”felaktigheterna” i approximationerna ovan fortplantas till motsvarande fouriertransformer, kan det vara nyttigt att hålla följande fakta i minnet:

$$x(t)\cdot y(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} X(f) * Y(f),$$

$$x(t) * y(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} X(f)\cdot Y(f),$$

$$\delta(t-a) \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} e^{-2\pi j af}$$

$$T\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-n/T),$$

$$\mathrm{rect}_P(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} P\ \mathrm{sinc}\ Pf.$$

10.2 Fall I. Fel från trunkering (Hj §6.4)

Man har $\hat{y}_P(t) = y(t)\cdot \mathrm{rect}_P(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} \hat{Y}_P(f) = Y(f) * P\ \mathrm{sinc}\ Pf$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f-\phi)\, P\ \mathrm{sinc}\ P\phi\ d\phi.$$ [3]

En heuristisk tolkning av uttrycket för transformen kan se ut så här: Nyssnämnda faltning kan ses som att man ersätter $Y(f)$ med ett glidande medelvärde där funktionen P sinc $P(\phi)$ anger vilken ”vikt” man ger det funktionsvärde i punkten som ligger ϕ enheter ifrån f.[4] Eftersom P sinc $P(\phi)$ för *stora* P väsentligen är $\neq 0$ bara i närheten av $\phi = 0$, så kommer man då att bilda ett slags mycket ”lokala” medelvärden – grafen för $\hat{Y}_P(f)$ blir en ”blurrad” variant av grafen för $Y(f)$.

Man har vidare att

$$\hat{Y}_P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\cdot \mathrm{rect}_P(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt = \int_{-P/2}^{P/2} y(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt,$$

vilket kombinerat med det faktum att $\frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} y(t)\, e^{-2\pi j k t/P}\, dt = Y_k$ är den k:tefourierseriekoefficienten för (den P-periodiska fortsättningen) av funktionen $y(t)$, $-P/2 < t < P/2$, ger att

$$\hat{Y}_P(k/P) = P\int_{-P/2}^{P/2} y(t)\, e^{-2\pi j k t/P}\, dt = P\, Y_k$$

Om P är ett ”stort” tal så bör i sampelpunkterna k/P, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, på frekvensaxeln gälla[5]

$$\boxed{Y(k/P) \approx \hat{Y}_P(k/P) = P\, Y_k} \qquad (57)$$

---

3 Funktionen P sinc Pf kallas $d_P(f)$ i Hj. Se t.ex Hj sid 88 för grafernas utseende. Se också arb.matr 4, sid 39.

4 Obs att vi vet att $\int_{-\infty}^{\infty} P\ \mathrm{sinc}\ P\phi\ d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\ \phi\ d\phi = 1$.

5 Hj sid 96.

På grund av ovannämnda medelvärdesbildning kan felen förväntas bli större i punkter där $X(f)$ varierar kraftigt än i punkter där $X(f)$ är relativt konstant.

Eftersom $1/P$ är ett mått på bredden hos huvudloben hos viktsfunktionen – dess nollställen närmast origo är $\pm 1/P$ (se också fig i t.ex Hj sid 38) – kan man via den parametern få en uppfattning om hur nära två frekvenstoppar kan få ligga för att de efter medelvärdesförfarandet fortfarande skall gå att ”känna igen”. Storheten $1/P$ tas som mått på *frekvensupplösningen*. (Se Hj §6.2.4 och särskilt figurerna 6.3 och 6.5.)

10.3 Fall II. Fel från sampling (Hj §6.5)

Här har vi $$\hat{y}_{T,}(t) = y(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} \quad \hat{Y}_T(f) = Y(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(f - n/T).$$

Detta betyder att $\hat{Y}_T(f)$ exakt är den $1/T$-periodiska fortsättningen till $Y(f)$. Detta fall behandlades i arb.matr 5. För bandbegränsade signaler (där alltså $Y(f) = 0$ utanför något ändligt intervall) kan man för tillräckligt stora värden på $1/T$ ($\geq 2\times$ bandbredden $= 2\times$ Nyquistfrekvensen)) exakt rekonstruera $Y(f)$ ur summan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(f - n/T)$ – man har att $Y(f) = \hat{Y}_T(f)$ för f inom bandet. Detta preciseras i samplingssatsen (Arb.matr 5, sid 56,Hj sid 183, OW sid 518).

För signaler som inte är bandbegränsade, men där spektret avtar ”snabbt” mot 0 då $f \to \pm\infty$, så har man istället att $$Y(f) \approx \hat{Y}_T(f), \text{ för ”måttliga” } f.$$

De felaktigheter man får då, härör från termerna $Y(f - n/T)$, $n \neq 0$, i summan. Man kan alltså för ett visst f-värde utifrån enbart $\hat{Y}_T(f)$ inte skilja på $Y(f)$:s värden i de olika frekvenserna $f - n/T$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Detta är den s.k. *aliaseffekten*. Denna blir – återigen förutsatt att $Y(f)$ avklingar ”snabbt” mot 0 – mindre uttalad ju mindre sampelavståndet är.

Man har också

$$\hat{y}_T(t) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, \delta(t - nT) \quad \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} \quad \hat{Y}_T(f) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, e^{-2\pi j nTf} = T \cdot Y_d(Tf), \quad (6$$

där $Y_d(\nu)$ är TDFT:n för följden av sampelvärden $y[n]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Alltså: För ”snabbt” avklingande $Y(f)$ är $$\boxed{Y(f) \approx T \cdot Y_d(Tf)} \qquad (58)$$

Approximationen kan förväntas vara god om $1/T > 2B$, där B är en frekvens över vilken $Y(f)$ är försumbar.

> **Antivikningsfilter:** (Hj 8.6, sid 114) Ett sätt att förminska felet från samplingen är att låta den föregås av en så kallad *antivikningsfiltrering*. Ett idealt antivikningsfilter tar in en analog signal $y(t)$ och filtrerar bort alla dess frekvensbidrag utöver en viss nivå, $|f| \geq B$, medan bidragen från lägre frekvenser inte berörs, (*lågpassfiltrering*). För utsignalen $y_a(t)$ från filtret är alltså $Y_a(f) = Y(f)$, då $|f| < B$, medan $Y_a(f) = 0$, då $|f| \geq B$,

---

6 Detta samband, d.v.s. att $T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, e^{-2\pi j nTf} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(f - n/T)$, kallas ibland *Poissons summationsformel* efter sin upptäckare, den franske matematikern *Siméon Denise Poisson* (1781 – 1840).

Samplas den på detta vis bandbegränsade signalen $y_a(t)$ med ett sampelintervall $T < \frac{1}{2B}$, så kan, enligt samplingssatsen, $y_a(t)$ och därmed $Y_a(f)$, exakt rekonstrueras ur sampelvärdena. På köpet får man exakta värden för $Y(f)$, för frekvenserna i intervallet $|f| < B$.

För illustrationer se Hj sid 116-7.

10.4 Fall III. Fel från trunkering och sampling (Hj §6.2-3)

Den approximation till $y(t)$ man i detta fall arbetar med är

$$y(t) \approx \hat{y}_{T,P}(t) = y(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^{M} \delta(t - nT), \text{ där } P = (2M + 1)T = NT. \quad (7$$

Man åstadkommer det uttrycket genom att man först multiplicerar $y(t)$ med $\mathrm{rect}_P(t)$ (d.v.s. bara betraktar signalen i tidsintervallet $-P/2 \le t \le P/2$) och sedan multiplicerar med $T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, (d.v.s. samplar med sampelintervallet T) eller vice versa. Faltningssatsen ger då att

$$\hat{y}_{T,P}(t) \quad \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} \quad Y(f) * P \operatorname{sinc} Pf * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$$

$\hat{Y}_{T,P}(f)$ åstadkoms alltså utifrån $Y(f)$ genom en medelvärdesbildning (faltningen med $P \operatorname{sinc} Pf$) åtföljd av en $1/T$-periodisk fortsättning (faltningen med $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$) eller vice versa. (Jmfr Hj 6.2.3-4).

Vi har vidare att

$$\hat{y}_{T,P}(t) = T \cdot \sum_{n=-M}^{M} y[n]\, \delta(t - nT) \quad \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} \quad \hat{Y}_{T,P}(f) = T \cdot \sum_{n=-M}^{M} y[n]\, e^{-2\pi j nTf},$$

Jämför man detta med definitionen[8] för DFT:n för den ändliga följden $y[n]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm M$,

$$Y[k] = \sum_{n=-M}^{M} y[n]\, e^{-2\pi j nk/N}, \quad N = 2M + 1,$$

så avläser man att för tillräckligt stora P och små T bör i sampelpunkterna k/P på frekvensaxeln gälla

$$\boxed{Y(k/P) \approx \hat{Y}_{T,P}(k/P) = T\, Y[k].} \qquad (59)$$

Också här är $1/P$ ett mått på frekvensupplösningen och aliaseffekten försumbar om $1/T > 2B$, där B är en frekvens över vilken $Y(f)$ är försumbar.

Detta leder till ett tänkbart förfarande för att beräkna fouriertransformer till analoga signal (= signaler definierad på **R**): Efter att ha valt P och T och avläst en följd av N st sampelvärden enligt principerna ovan, bestäms DFT:n för denna följd – lämpligen med FFT-algoritmen (eller en datorprogramvara som använder den). Sambandet (59) ger sedan approximativa värden för $Y(f)$ i punkterna $f = k/P$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm M$ (=($N - 1)/2$).

Anmärkning: Fouriertransformen till den ändliga summan $T \cdot \sum_{n=-M}^{M} \delta(t - nT) = s_{T,P}(t)$ i approximationen $\hat{y}_{T,P}(t)$ kan också beräknas direkt:

Man får

---

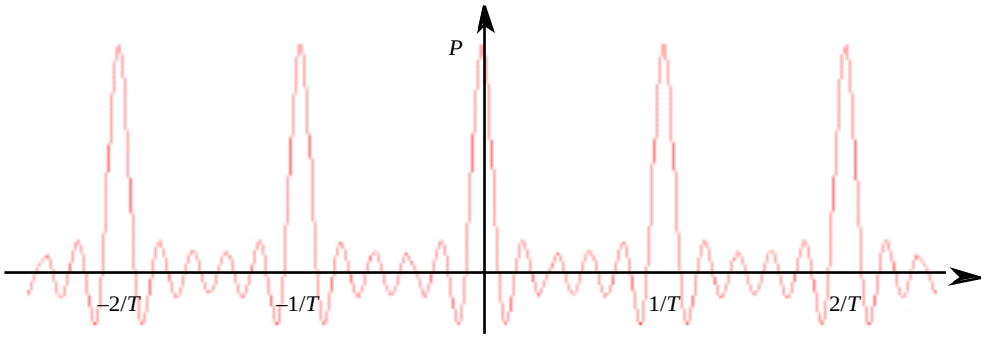
7 Notera att N alltid är ett udda heltal i detta sammanhang.

8 Hj:s variant.

$$s_{T,P}(t) \quad \overset{\mathcal{FT}}{\longrightarrow} \quad S_{T,P}(f) = T \sum_{n=-M}^{M} e^{-2\pi j n T f},$$

Denna geometriska serie kan summeras (se arb.matr 3 sid 20-1) och man får

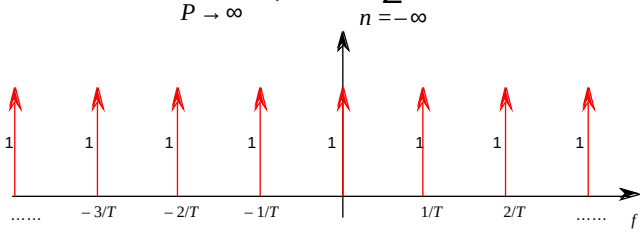
$$S_{T,P}(f) = T \frac{\sin \pi P f}{\sin \pi T f} = T \frac{\sin \pi N T f}{\sin \pi T f}$$



För grafer se Hj sid 70 o. 83.

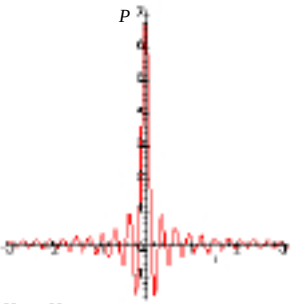
Man kan visa att $S_{T,P}(f)$ för stora värden på P (och fixt T) alltmer närmar sig ett ”enhetspulståg”:

$$\lim_{P \to \infty} S_{T,P}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T).$$



Låter man istället $T \to 0$ (och håller P fixt) får man

$$\lim_{T \to 0} S_{T,P}(f) = \lim_{T \to 0} T \frac{\sin \pi P f}{\sin \pi T f} = \frac{\sin \pi P f}{\pi f} = P \operatorname{sinc} P f \qquad (9$$



Nollställen: $\pm 1/P$, $\pm 2/P$, $\pm 3/P$, …

Vidare kan man visa att

$$\lim_{P \to \infty} P \operatorname{sinc} P f = \delta(f)$$

varför

$$\lim_{P \to \infty} \lim_{T \to 0} S_{T,P}(f) = \lim_{T \to 0} \lim_{P \to \infty} S_{T,P}(f) = \delta(f),$$

vilket återigen belyser det intuitiva ”stort observationsintervall $\Leftrightarrow$ hög upplösning” och ”tät sampling $\Leftrightarrow$ liten aliaseffekt”.

Övningar: Ex 7.1 - 5.

---

9 Kallas $d_P(f)$ i Hj.

11. Om pulsamplitudmodulering (PAM)

(Hj 8.4-5, OW 7.1.2, 7.2)

11.1 Inledning

Vänsterledet i samplingssatsen (sid 56 i arb.matr 5):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \tag{60}$$

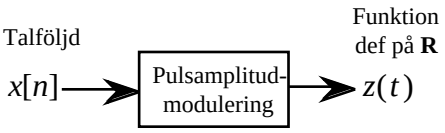
konstruerar tydligen en funktion $\hat{x}(t)$, definierad i **R** utifrån talföljden $x(nT) = x[n]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Det samplingssatsen utsäger är, att $\hat{x}(t) = x(t)$ under förutsättning att $x(t)$ är bandbegränsad med en bandbredd $\leq \frac{1}{2T}$. Beräkningsproceduren (60) kan ses som ett rekonstruktionsförfarande – utifrån sampelvärdena i punkterna $t = nT$ beräknar man funktionsvärden för t-värden mellan dessa punkter. Händelsevis får man de exakta $x(t)$-värdena under nyssnämnda förutsättningar.[10] När de inte är uppfyllda så är $\hat{x}(t)$ i stället en mer eller mindre bra approximation till $x(t)$.

Proceduren (60) kan också ses som en slags ”D/A-omvandlare” – en sådan tar emot en digital signal och ger ifrån sig en analog signal (= signal definierad på **R**). Samtidigt är (60) därför ett exempel på ett generellare förfarande som kallas *pulsamplitudmodulering*, förkortat PAM.

En pulsamplitudmodulering karakteriseras av följande egenskaper:

1° Utgående från en talföljd beräknas (produceras) en funktion definierad på **R.**



(En tolkning: Proceduren är en D/A-omvandling)

2° (Tidsinvarians)

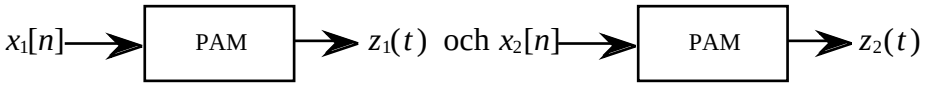
Om

så gäller

(En tolkning: Om $x[n]$ härrör från en sampling med sampelavstånd T av en analog signal och sampelpunkterna förrskjuts kT enheter i tiden, så kommer den producerade analoga signalen likaledes att förskjutas kT enheter i t-led.)

3° (Linearitet)

Om man med samma PAM-procedur har



och c_k, $k = 1, 2$, är konstanter, så gäller också att

och denna princip skall också gälla för konvergenta oändliga lineära kombinationer:

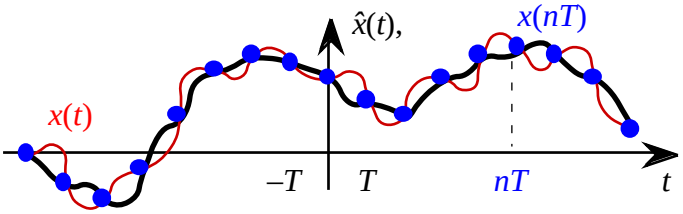
---

10 Se också figur 7.10, sid 524 i OW.

Om $\quad x_k[n] \longrightarrow \boxed{\text{PAM}} \longrightarrow z_k(t) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

så är $\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x_k[n] \longrightarrow \boxed{\text{PAM}} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z_k(t)$

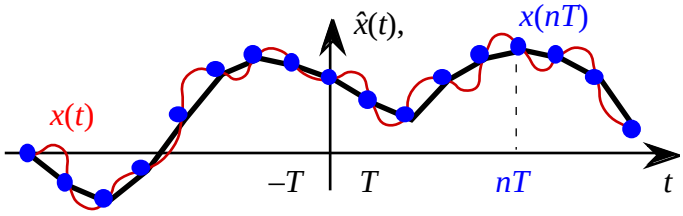
Andra exempel på PAM än det inledningsvis nämnda är rekonstruktionsförfaranden då man på annat sätt än som i (60) interpolerar mellan sampelpunkterna $(nT, x(nT))$ på grafen $(t, x(t))$ till en analog signal $\hat{x}(t)$:



$x(t)$:s graf är ritad som en smal kurva, rekonstruktionens graf är den fetare.

Exempel 11.1 (Linjär interpolering, ”first-order hold”, Hj sid 106, OW7.2, sid 522-7)

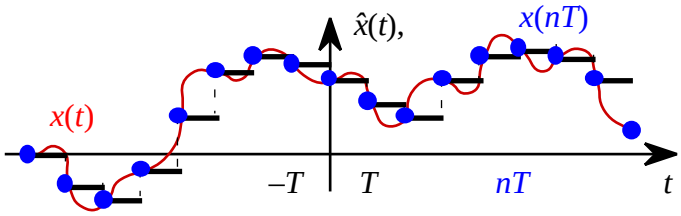
Grafen för $\hat{x}(t)$ är den man får om ”grannpunkterna” $(nT, x[n])$ och $((n + 1)T, x[n + 1])$ förbinds med ett linjestycke:



♦

Exempel 11.2 (Fasthållning, ”zero-order hold”, Hj sid 108, OW7.1.2, sid 520-2)

Grafen för $\hat{x}(t)$ är sträckvis kontant, $= x[n]$ i intervallet $nT \le t < (n + 1)T$.



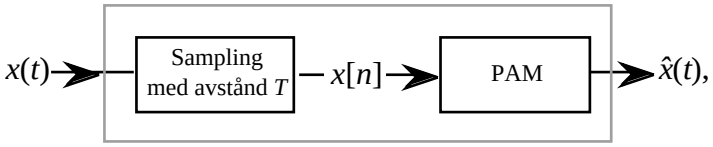
♦

Begreppet PAM kan också med fördel användas för att göra matematiska modeller för faktiska instrument som avläser inkommande signaler. Instrument som just bara samplar – d.v.s producerar signalen

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \delta(t - nT)$$

utifrån signalen $x(t)$ – går knappast att realisera. Däremot kan man ofta uppfatta utsignalen $\hat{x}(t)$ från mätapparaturen som en bearbetning av sampelvärdena med en PAM-procedur karakteristisk för apparaturen ifråga:

Modell för mätapparturen



(61)

Övning:

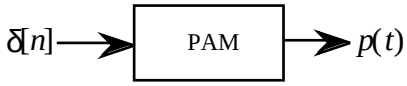
11.1 Kontrollera att principerna 1° – 3° ovan är uppfyllda för procedurerna i ex. 10.1-2.

11.2 Allmänt om PAM

Mängden av olika tänkbara PAM:ar är förhållandevis lätt att överblicka: Observera nämligen att varje talföljd $x[n]$ kan skrivas

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k],$$

där $\delta[n]$ är ”enhetspulsen” $\begin{cases} 1, & \text{om } n = 0, \\ 0, & \text{om } n \neq 0. \end{cases}$ Kallar man ”pulssvaret”, d.v.s. PAM:en av $\delta[n]$, för $p(t)$,



så leds man till följande[11]:

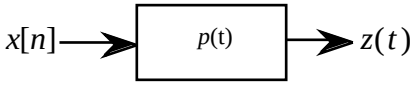
Enl 2°:

Enl 3°:

Slutsatsen blir att

Om	$x[n] \longrightarrow$ PAM $\longrightarrow z(t)$	
så är	$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]p(t-kT),$ [12]	(62)
där	$p(t)$ är pulssvaret till PAM:en.	

Omvänt ser man att varje beräkningsprocedur av typen (62) uppfyller villkoren 1°–3° och därför är en PAM. Symboliskt kan man rita:



Eftersom $p(t-kT) = p(t) * \delta(t-kT),$

så kan (62) också skrivas

---

11 Beteckningen $p(t)$ för pulsvaret används i Hj. I OW skrivs $h(t)$ och $p(t)$ är där istället reserverat för pulståget $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$.

12 Likheten (59) tas i Hj som definition på begreppet PAM.

$$z(t) = x_s(t) * p(t), \tag{63}$$

där $$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - kT)$$

är den mot x svarande sampelfunktionen.

Fouriertransformerar man likheten (63) får man enligt faltningssatsen och det faktum att FT av $\delta(t - kT)$ är $e^{-2\pi j kfT}$ att

$$Z(f) = X_s(f) \cdot P(f),$$

där $$X_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, e^{-2\pi j kfT} = X_d(fT)$$

och $X_d(\nu)$ är TDFT:n till följden $x[n]$.

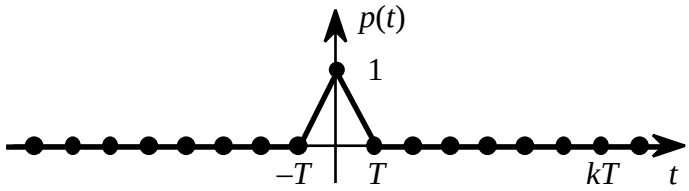
Sammanfattningsvis

Sats. (Hj sid 108)
För pulsamplitudmodulering med pulssvaret $p(t)$, så gäller för den diskreta insignalen $x[n]$ och analoga utsignalen $z(t)$:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, p(t - kT),$$

$$Z(f) = X_d(fT) \cdot P(f),$$

Exempel 11.1 forts (Hj sid.106, OW7.2)
Vid linjär interpolation är pulssvarets graf:



(13

d.v.s $$p(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T, & \text{då } |t| \le T \\ 0, & \text{då } |t| > T. \end{cases}$$

Observerar man att $p(t) = \text{rect}\,(t/T) * \text{rect}\,(t/T)$, (Kontrollera detta som en övning!)

så får man fouriertransformen $P(f) = (T \text{ sinc } Tf)^2 = \dfrac{\sin^2 \pi Tf}{\pi^2 f^2}$.

Om nu $x[n]$ är sampelvärdena i punkterna $t = nT$ av en analog signal $x(t)$, så producerar denna PAM den linjära interpolationen till $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, p(t - kT).$$

Sambandet mellan fouriertransformerna (FT för $\hat{x}(t)$:s del och TDFT för $x[n]$:s del) är då:

$$\hat{X}(f) = X_d(fT) \cdot \frac{\sin^2 \pi Tf}{\pi^2 f^2}.$$

[13] Linjär interpolation: Förbind ”grannpunkterna” med räta linjestycken

Om en mätappartur enligt modellen (61) karakteriseras av denna PAM, så kommer exempelvis

$$X(f) = T\,X_{\mathrm{d}}(fT) \text{ för } |f| \le 1/T$$

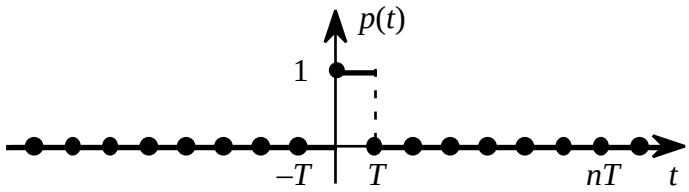
om signalen är bandbegränsad och $1/T \ge 2\times$ bandbredden (samplingssatsen!). Sambandet mellan fouriertransformerna för (den för oss ”kända”) signalen $\hat{x}(t)$ och (den för oss inte så ”kända”) signalen $x(t)$ ges då av

$$X(f) = \hat{X}(f) \cdot \frac{\pi^2 f^2 T}{\sin^2 \pi T f}, \text{ för } |f| < 1/T \text{ och } = 0 \text{ om } |f| > 1/T.$$

Insignalen $x(t)$ kan alltså till fullo rekonstrueras i sådana fall. ♦

Exempel 11.2 forts (Hj sid 108, OW 7.1.2)

Vid linjär interpolation är pulssvarets graf istället:



(14

d.v.s

$$p(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 \le t \le T, \\ 0, & \text{då } t > T \text{ eller } T < 0. \end{cases}$$

Observerar man att $p(t) = \mathrm{rect}_T\,(t - T/2)$,

så får man fouriertransformen $P(f) = (T \operatorname{sinc} Tf)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} Tf/2} = \dfrac{\sin \pi T f}{\pi f}\, \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} T f}$.

Om nu $x[n]$ är sampelvärdena i punkterna $t = nT$ av en analog signal $x(t)$, så producerar denna PAM en sträckvis konstant approximation till $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, p(t - kT).$$

Sambandet mellan fouriertransformerna (FT för $\hat{x}(t)$:s del och TDFT för $x[n]$:s del) är då:

$$\hat{X}(f) = X_{\mathrm{d}}(fT) \cdot \frac{\sin \pi T f}{\pi f}\, \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} T f}.$$

Om en mätappartur enligt modellen (61) karakteriseras av denna PAM, så kommer exempelvis

$$X(f) = T\,X_{\mathrm{d}}(fT) \text{ för } |f| \le 1/T$$

om signalen är bandbegränsad och $1/T \ge 2\times$ bandbredden. Sambandet mellan fouriertransformerna för (den för oss ”kända”) signalen $\hat{x}(t)$ och (den för oss inte så ”kända”) signalen $x(t)$ ges då av

$$X(f) = \hat{X}(f) \cdot \frac{\pi f T\, \mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} T f}}{\sin \pi T f} \text{ för } |f| < 1/T \text{ och } = 0 \text{ om } |f| > 1/T.$$

Insignalen $x(t)$ kan alltså till fullo rekonstrueras också i detta fall. ♦

Mera läsning: Hj §8.6 om rekonstruktionsfel och antivikningsfilter.

Övningar: Ex 8.8 – 14.

---

14 Fasthållning: Dra ett horisontellt streck med längd T åt höger från varje punkt.