5. Några viktiga summations- och integrationsformler.

Först en repetition:

5.1 Geometriska serier

För godtyckliga komplexa tal a och k gäller

$$\underbrace{a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1}}_{n \text{ termer}} = s = \begin{cases} a\,\dfrac{1-k^n}{1-k}, & \text{om } k \neq 1, \\ a\,n, & \text{om } k = 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Bevis: Om $a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = s$,
så är $ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} + ak^n = ks$,
varav efter subtraktion,

$$a(1-k^n) = (1-k)s \Leftrightarrow a\,\frac{1-k^n}{1-k}, \text{ (om } k \neq 1).$$

Om $k = 1$, så är s summan av n st tal a, d.v.s. $= na$. ♦

Övningar:

5.1 Summera

a. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27} + \dfrac{8}{81} + \ldots + \dfrac{2^{99}}{3^{100}}$,

b. $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27} - \dfrac{8}{81} + \ldots - \dfrac{2^{99}}{3^{100}}$.

5.2 I sambandet $\dfrac{1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^n}{1 - k + k^2 - k^3 + \ldots - k^n} = 2$ är n ett udda heltal ≥ 1. Bestäm k.

5.3 Verifiera att summan

$$e^{-Mt} + e^{-(M-1)t} + \ldots + e^{-t} + 1 + e^{t} + \ldots + e^{(M-1)t} + e^{Mt}$$

för $t \neq 0$ kan skrivas

$$\frac{e^{Pt/2} - e^{-Pt/2}}{e^{t/2} - e^{-t/2}} = \frac{\sinh Pt/2}{\sinh t/2},$$

där P är antalet termer i summan.

5.4 Summan (5.1) ovan är tydligen en polynom i variabeln k och måste därför vara kontinuerlig. Speciellt måste summans värde för $k = 1$ vara $= \lim\limits_{k \to 1} a\,\dfrac{1-k^n}{1-k}$,
Verifiera detta genom att direkt beräkna gränsvärdet t.ex. med hjälp av l'Hospitals regel.

5.5 Vilket värde har $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sinh Pt/2}{\sinh t/2}$?

De komplexa exponentialfunktionerna av typen $e^{i\omega t}$, där ω och t är reella, tilldrar sig ett speciellt intresse inom signalteorin. Vi skall i de följande avsnitten titta närmare på vissa enkla summor och integraler av sådana funktioner. Det visar sig nämligen att det finns oväntade samband mellan sådana summor och δ-pulserna. Sambanden är hörnstenar inom fourieranalysen.

5.2 Summation av harmoniska vågor ($e^{i\omega t}$-funktioner), pulståg

5.2.1 Först en kommentar till vissa variabelval:

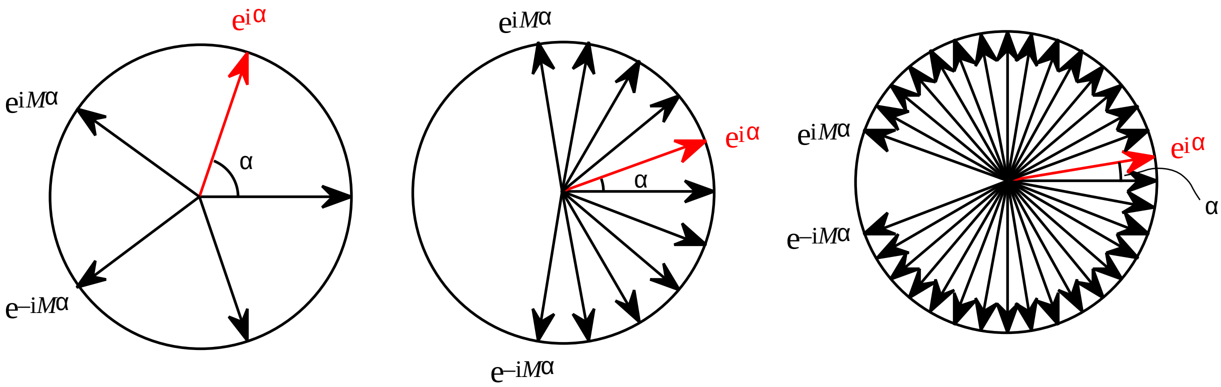
Värdet av funktionen $e^{i\omega t}$, där ωt är reellt, är som vi vet ett komplext tal med belopp 1 och med argumentvinkeln ωt *mätt i radianer*. Om t har tidsdimension så kan man åskådliggöra funktionen som en rörlig pekare fäst i origo i planet. Pekaren snurrar med en vinkelhastighet på ω radianer/sek – moturs om $\omega > 0$. Att man oftast valt just radianmåttet som vinkelmått beror bl.a. på att deriveringsformlerna för den komplexa exponentialfunktionen (och därmed sinus- och cosinusfunktionerna) blir speciellt enkla.

Exempelvis är som bekant $\frac{d}{dv}\sin v = \cos v$, om v mäts i radianer, medan $\frac{d}{dv}\sin v° = \frac{\pi}{180}\cos v°$, om v mäts i grader. Trots att radianmåttet verkar vara "bäst" i matematiska sammanhang kan det i vissa fall ändå vara fördelaktigt att välja ett annat vinkelmått. Ett "naturligt" sådant är att ta *ett varv* som enhet. Ett varv motsvarar då 2π radianer respektive 360°. En pekare som roterar f varv/sek (dvs. med frekvensen f Herz) har då en vinkelhastighet på $2\pi f$ radianer/sek. Vi har alltså

$$\omega = 2\pi f.$$

5.2.2 Summation av harmoniska funktioner

Vi tittar nu närmare på summor, $\sum_{n=-M}^{M} e^{in\omega t}$, av heltalspotenser av $e^{i\omega t}$-funktioner. I det komplexa talplanet utgör termerna i summan ett udda antal ($P = 2M + 1$ st) enhetspilar, spegelsymmetriskt placerade kring reella axeln och för jämnt fördelade över en sektor av enhetscirkeln. Några exempel finns i figurerna nedan. För att hyfsa formlerna litet har vi satt $\omega t = \alpha$.



$\alpha = 2\pi/5 = 72°$
$M = 2,\ P = 5$

$\alpha = \pi/9 = 20°$
$M = 5,\ P = 11$

$\alpha = \pi/18 = 10°$
$M = 16,\ P = 33$

Summan

$$S_P(\alpha) = \sum_{n=-M}^{M} e^{in\alpha} = e^{-iM\alpha} + e^{-i(M-1)\alpha} + \ldots + e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha} + \ldots + e^{i(M-1)\alpha} + e^{iM\alpha}$$

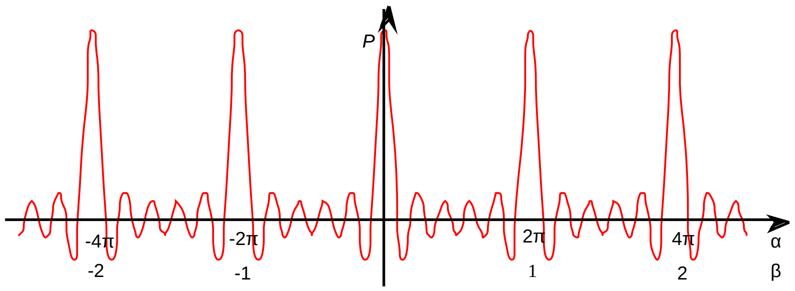
är en geometrisk serie med kvot $e^{i\alpha}$, första term $e^{-iM\alpha}$ och med P stycken termer, där $P = 2M + 1$. För $e^{i\alpha} \neq 1$ får man därför summan

$$S_P(\alpha) = e^{-iM\alpha}\frac{e^{i(2M+1)\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} = e^{-iM\alpha} \cdot \frac{e^{i(2M+1)\alpha/2}}{e^{i\alpha/2}} \cdot \frac{e^{i(2M+1)\alpha/2} - e^{-i(2M+1)\alpha/2}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}} =$$
$$= \frac{e^{iP\alpha/2} - e^{-iP\alpha/2}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}} = \frac{\sin P\alpha/2}{\sin \alpha/2}.$$

För $e^{i\alpha} = 1$, dvs. när $\alpha = 2\pi \times \text{heltal}$, är summan istället $= P$. Notera att termerna i summan alla är 2π-periodiska i variabeln α, detsamma gäller då förstås också summan. Väljer man i stället andelen av varvet som vinkelmått, dvs. sätter $\alpha = 2\pi\beta$, så får man istället den 1-periodiska summan:

$$S_P(2\pi\beta) = \frac{\sin \pi P\beta}{\sin \pi\beta} \quad \text{utom när } \beta = \text{heltal, då summan} = P.$$

Summan är tydligen alltid reell och som funktion av α (respektive β) har dess graf principutseendet:

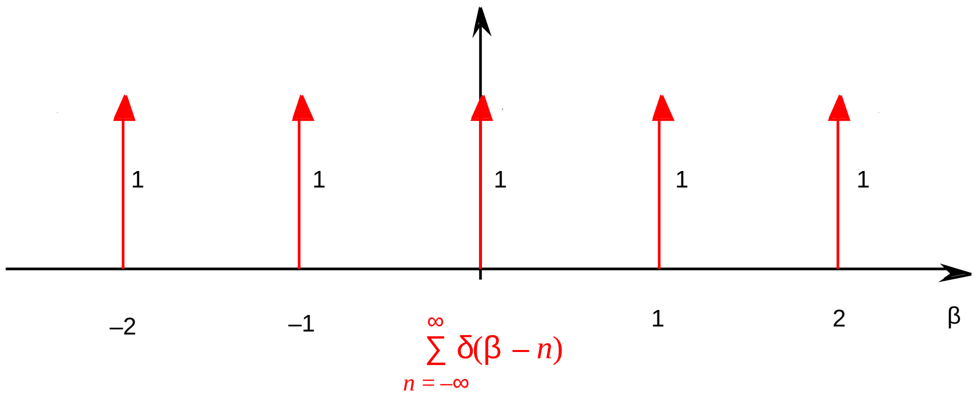


Funktionen är periodisk med periodlängd 1, och dess 0-ställen i intervallet $0 < \alpha < 2\pi$ ($0 < \beta < 1$) är $\alpha = 2\pi/P, 4\pi/P, \ldots, 2\pi(P-1)/P$ ($\beta = 1/P, 2/P, \ldots, (P-1)/P$) [1]

Man kan visa att

$$\int_a^b S_P(2\pi\beta)\,d\beta \to \begin{cases} 1, \text{ om intervallet } a < \beta < b \text{ innehåller precis en heltalspunkt,} \\ 0, \text{ om intervallet } a < \beta < b \text{ inte innehåller någon heltalspunkt,} \end{cases} \text{ då } P \to \infty.$$

Funktionen kommer alltså för stora P att approximativt motsvara enhetspulser vid punkterna β = heltal. Funktionen representerar ett så kallat *pulståg* – ”enhetspulståget”.



Resultatet kan med hjälp av generaliserade funktioner uttryckas

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n\beta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\beta - n)} \tag{5.2}$$

Övning:

5.6 ”Skala” (5.2) genom att sätta $\beta = t/T$ (t variabel, T konstant > 0). Utnyttja sambandet (4.6) för att verifiera att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t/T} = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad (T\text{-periodiska fallet}) \qquad (5.2')$$

och speciellt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{int} = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) \qquad (2\pi\text{-periodiska fallet}) \qquad (5.2'')$$

1 I figuren är $P = 11$.

Sambanden (5.2) – (5.2´´) är alltså likheter mellan *generaliserade* funktioner och är med den klassiska analysens synsätt meningslösheter. Exempelvis är vänsterleden divergenta serier[2] som saknar (klassisk) summa! Inte desto mindre kan man använda sambanden för att förhållandevis lätt härleda "klassiska" resultat som är mycket svåra att få fram med andra metoder.

Exempel 5.1

Om man t.ex. multiplicerar ekvationen (5.2´´) med en funktion $x(t)$ som är kontinuerlig åtminstone i punkterna $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, får man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{int} = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - 2\pi n) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2\pi n)\delta(t - 2\pi n) \qquad (5.3)$$

och sedan integrerar leden över hela reella axeln, så får man en mycket generell summationsformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{int}\, dt \right) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - 2\pi n)\, dt \right) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2\pi n) \qquad (5.4)$$

Integralen i vänsterledet känner vi igen[3] som fouriertransformen av $x(t)$, $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$, i heltalspunkterna $\omega = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, varför (5.4) kan skrivas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2\pi n). \; ^{(4} \qquad (5.4´)$$

Anmärkning: Detta samband är (en variant) av den s.k. *Poissonska summationsformeln*. För att den skall vara giltig i "klassisk" mening måste funktionen $x(t)$ ha en del "snällhetsegenskaper" (krav på konvergens av inblandade summor och integraler t.ex.). Vi går dock inte in på detta närmare här. Litet slarvigt kan man säga att den i praktiskt förekommande fall stämmer om de båda leden är meningsfulla från "klassisk" synpunkt.

För att se vad sambandet (5.4´) innebär i något speciellt fall, låt oss ta

$$x(t) = \text{rect}\,(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2, \end{cases}$$

Fouriertransformen till denna funktion beräknades i exempel 1.2 och den är

$$X(\omega) = \frac{\sin \omega/2}{\omega/2}, \text{ då } \omega \neq 0 \text{ och } 1, \text{ då } \omega = 0.$$

Eftersom rect $(2\pi n) = 0$ för alla heltal $n \neq 0$ och $= 1$ för $n = 0$, så får man

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\sin n/2}{n/2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n/2}{n/2} = 2\pi,$$

vilket, eftersom de båda serierna i vänster led är lika, ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n/2}{n/2} = \pi - \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

---

2 De successiva termerna i en serie som är konvergent i klassisk mening måste $\to 0$. Termerna i summan i vänster led har alla beloppet 1, så den serien kan inte vara konvergent.

3 Analysekvationen (1.8) i kapitel 1.

4 Obs att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n)$. Summation av samma termer, men i omvänd ordning.

Övningar:

5.7 Vilket samband får man om $x(t)$ sätts till $e^{-|t|}$ i (5.4´)? För fouriertransforming av $x(t)$ se övning 1.7b – d.

5.8 **a.** Verifiera att fouriertransformen till $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } |t| < a, \\ 0, & \text{om } |t| > a, \end{cases}$ $a > 0$, är $X(\omega) = 2\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$.

b. Genom välja $x(t)$ som i uppgift a, visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n} = \begin{cases} (\pi - a)/2, & \text{för } 0 < a < 2\pi, \\ (3\pi - a)/2, & \text{för } 2\pi < a < 4\pi. \end{cases}$

c. Vilket är värdet av summan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n}$, då $2N\pi < a < 2(N+1)\pi$, N heltal?

5.9 Bestäm den reella fourierserien till den 2-periodiska funktion $g(a)$ som i intervallet $0 < a < 2$ ges av
$$g(a) = \frac{1-a}{2}.$$

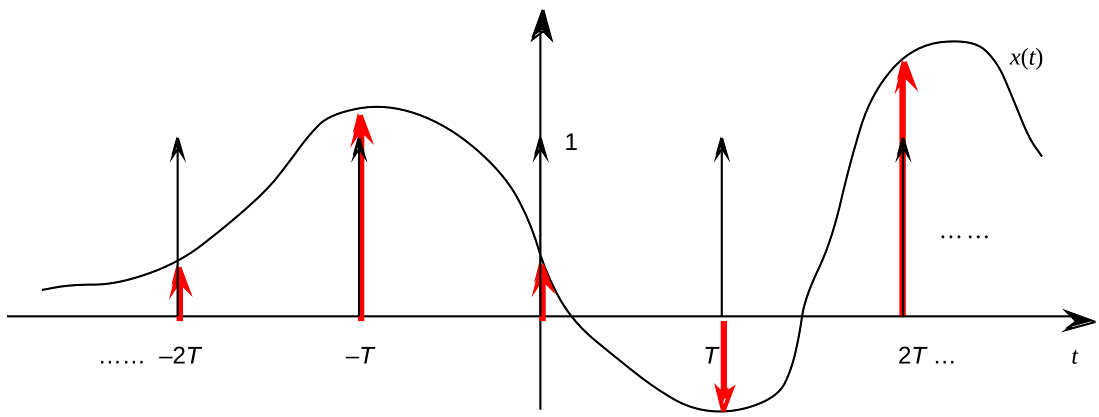
Ledning: Man kan förstås använda integralformlerna för beräkning av seriens koefficienter, men man kan också avläsa svaret från resultatet i uppgift 5.8b.

5.3 Regelbunden sampling $\leftrightarrow$ multiplikation med pulståg

Inkommande kontinuerligt definierade signaler $x(t)$ kan i allmänhet inte avläsas vid alla tidpunkter. Något mer realistiskt är att de avläses vid tidpunkter $t = nT$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$: Man säger då att man *samplar* signalen (regelbundet) med *sampelavståndet* T. Värdena vid sampeltiderna ges då av följden $x[n] = x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Anmärkningsvärt nog kan motsvarande analytiska procedur koncist uttryckas med hjälp av pulstågsfunktionen, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Den samplade signalen svarar nämligen mot pulståget:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t-nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t-nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

Sampling med samplingsavståndet T av en kontinuerlig signal svarar mot att signalen *multipliceras* med pulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT).$$

Övningar

5.10 Låt $x(t) = \cos t$. Skriv upp analytiska uttryck för sampelfunktionerna för sampelavstånden $T = \pi/2$ respektive π. Vilka är följderna av sampelvärden i de båda fallen?

5.11 Låt $x_T(t)$ vara samplingen av signalen $x(t)$ med sampelavståndet T.

a. Beräkna $I_T = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\,dt$.

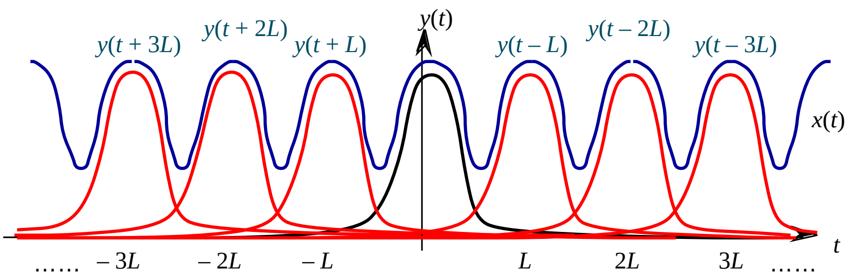
b. Vad bör gränsvärdet $\lim_{T \to 0+} T\, I_T$ rimligtvis ha för värde?

(Rita figur, se efter vad $T\,x(nT)$ betyder geometriskt.)

5.4 Periodisk fortsättning $\leftrightarrow$ faltning med pulståg

Det visar sig att också operationen ”att bilda den L-periodiska fortsättningen till en signal” har att göra med pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL)$. Låt nämligen $x(t)$ vara den L-periodiska fortsättningen av $y(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nL)$$



Observera att $y(t - nL) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\delta(t - \tau - nL)\,d\tau$, varför

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\delta(t - \tau - nL)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - nL)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\,\Delta_L(t - \tau)\,d\tau. \quad (5.6)$$

där $\Delta_L(t)$ är pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL)$

Integralen i höger led i (5.6) är tydligen en faltning

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\,\Delta_L(t - \tau)\,d\tau = y(t) * \Delta_L(t)$$

dvs.

$$x(t) = y(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL) \quad (5.7)$$

Sammanfattningsvis:

> *L-periodisk fortsättning* av en signal svarar mot att signalen *faltas* med pulståget
> $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL)\ .$$

Övning

5.12 Förenkla $\left(\sin t \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n\pi)$. (Rita figur!)

5.13 Beräkna $y\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ då $y(t) = \left(\sin t \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\pi}\right)\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\pi)$. (Rita figur!)

6. Fourierserier och fourierutveckling

6.1 Syntes- och analysekvationerna för fourierserier

I det här avsnittet skall vi se att formelparet (1.3´) ich (1,4´) för den komplexa fourierserieutvecklingen av L-periodiska funktioner,

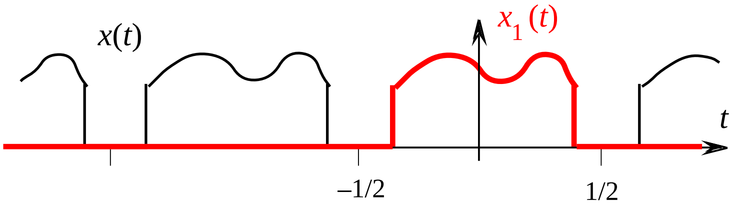
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{int/L},$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau)\, e^{-in\tau/L}\, d\tau.$$

är en konsekvens av summationsformeln (5.2):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)\,,$$

Låt $x(t)$ för enkelhets skull vara en 1-periodisk funktion. Funktionen $x_1(t) = x(t) \cdot \mathrm{rect}\,(t)$ beskriver då x:s värden i intervallet $-1/2 < t < 1/2$ och $x(t)$ är den 1-periodiska fortsättningen av $x_1(t)$.



d.v.s. $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, \Delta_1(t-\tau)\, d\tau, \text{ där } \Delta_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

Summationsformeln $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ gör det möjligt att skriva om uttrycket för $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_1(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi in(t-\tau)} \right) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\; e^{2\pi in(t-\tau)} \right) d\tau.$$

Här är $e^{2\pi in(t-\tau)} = e^{2\pi int} \cdot e^{-2\pi in\tau}$, där den första faktorn tydligen är oberoende av integrationsvariabeln τ, alltså

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\; e^{-2\pi in\tau}\; d\tau \right) e^{2\pi int}\,.$$

Men $x_1(\tau) = 0$ utanför intervallet $-1/2 \le \tau < 1/2$ och $= x(\tau)$ inom det intervallet, varför

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\; e^{-2\pi in\tau}\; d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} x(\tau)\; e^{-2\pi in\tau}\; d\tau,$$

vilket ger

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi i n t}, \\ \text{där } c_n &= \int_{-1/2}^{1/2} x(\tau)\, e^{-2\pi i n \tau}\, d\tau . \end{aligned}}$$

På så sätt återfår vi också för periodiska funktioner med godtycklig period L sambanden (1,3´) och (1.4´):

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi i n t/L}, && (6.1) \\ \text{där } c_n &= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x(\tau)\, e^{-2\pi i n \tau/L}\, d\tau . && (6.2) \end{aligned}}$$

Processen, att gå från en periodisk funktion till dess spektrum, är en *transformation* (eller *transform*), den så kallade *fourierserietransformen* ($\mathcal{FS}$). Om man vill framhäva detta kan man skriva analysekvationen som:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x(\tau)\, e^{-2\pi i n \tau/L}\, d\tau,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Syntesekvationen, som ju omvänt anger vilken periodisk funktion som har spektret c_n, kan skrivas på motsvarande sätt:

$$c_n \xrightarrow{\mathcal{FS}^{-1}} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi i n t/L}.$$

Exempel 6.1: För $x(t) = \delta(t)$, $-1/2 \le t < 1/2$ får man fourierkoefficienterna

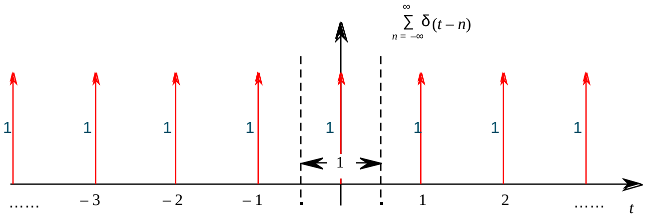
$$c_n = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\tau)\, e^{-2\pi i n \tau}\, d\tau = 1.$$

Den 1-periodiska fortsättningen av $\delta(t)$ är pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$, varför syntesekvationen ger

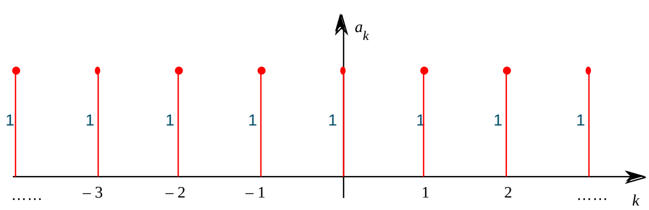
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t},$$

d.v.s. vi återfår sambandet (5.2) ovan.

Funktionen



och dess fourierkoefficienter



◆

Övning 1:

6.1a. Bestäm fourierkoefficienterna till de 1-periodiska funktionerna sin $2\pi t$ och cos $2\pi t$.

b. Bestäm fourierkofficienterna till den L-periodiska fortsättningen till $L\delta(t)$. Vilken blir syntesekvationen i detta fall?

6.2 Vilken är fourierserieutvecklingen $y(t)$ av den 3-periodiska funktion för vilken

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{då } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{då } 1 < t < 3. \end{cases}$$

Om $x(t)$ redan är en L-periodisk funktion, så är $x(t)$ identisk med den L-periodiska fortsättningen av funktionen $y(t) = x(t)$, $0 \le t < L$. Syntesekvationen ger därför att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi i n t / L}, \text{ då } -\infty < t < \infty.$$

Eftersom integralen $\displaystyle\int_C^{C+L} x(t)\,dt$ är oberoende av C om $x(t)$ är L-periodisk,[5] så spelar det ingen roll vilket intervall av längd L man integrerar över. Man kan använda beteckningen $\displaystyle\int_L$ för sådana integrationer. Analysekvationen kan då skrivas:

$$c_n = \frac{1}{L}\int_L x(\tau)\, e^{-2\pi i n \tau/L}\, d\tau. \qquad (6.2')$$

6.2 Egenskaper hos fourierserietransformen

Mellan en periodisk funktion och dess fourierkoefficienter finns många rätt enkla samband. Här följer en lista med några av de viktigaste:

Om den L-periodiska signalerna $x(t)$ och $y(t)$ har fourierseriekoefficienterna c_n resp. d_n, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, så gäller att

funktionen	har fourierseriekoefficienterna
$C\,x(t) + D\,y(t)$, C och D konstanta	$C\,c_n + D\,d_n$
$x'(t)$	$\dfrac{2\pi n i}{L}\,c_n$
$x''(t)$	$-\dfrac{4\pi^2 n^2}{L^2}\,c_n$
$x^{(m)}(t)$	$\left(\dfrac{2\pi n i}{L}\right)^m c_n$
$x(t-c)$	$e^{-2\pi n i c/L}\cdot c_n$
$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nL)$	$c_n = \dfrac{1}{L}$

5 Kan visas formellt genom att man deriverar integralen med avseende på c och utnyttjar att $x(c + P) = x(t)$. Genomför gärna detta!

Notera att sambanden som rör derivering och translation blir speciellt enkla för 2π-periodiska funktioner.

Tabell över den reella varianten av fourierserierna finns också i handboken β.

Dessa egenskaper följer ganska omedelbart ur analys- och syntesekvationerna. Exempelvis ger derivering av syntesekvationen

$$x'(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(2\pi i n/L)\, c_n]\, e^{2\pi i n t/L},$$

där man avläser fourierseriekofficienterna för $x'(t)$ till $(2\pi i n/L)\, c_n$.

Förutom dessa egenskaper så har vi den viktiga ”energirelationen”, *Parsevals relation* (1.20):

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 .}$$

Den gäller för alla L-periodiska signaler där integralen i vänster led är ändlig (dvs. signaler med ändlig medeleffekt).

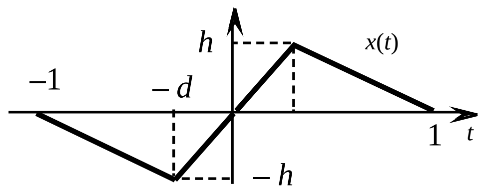
I nästa exempel använder vi några av ovanstående egenskaper för att underlätta räknearbete:

Exempel 6.2:

Problem: Bestäm fourierutvecklingen till den 2-periodiska funktion som i intervallet $0 \le t \le 1$ ges av

$$x(t) = \begin{cases} ht/d, & \text{då } 0 \le t \le d, \\ h(1-t)/(1-d), & \text{då } d \le t \le 1 \end{cases}$$

och för vilken $x(-t) = -x(t)$.



Lösning: Syntesekvationen har utseendet $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{\pi i n t}$, där fourierkoefficienterna kan beräknas direkt ur analysekvationen. Man kan dock slippa en hel del räkningar om man observerar att x' och framför allt x'' är betydligt enklare funktioner än x:

$$x'(t) = = \begin{cases} h/d, & \text{då } 0 \le |t| < d, \\ -h/(1-d), & \text{då } d < |t| \le 1. \end{cases} \qquad \text{(Rita grafen!)}$$

och

$$x''(t) = \left(\frac{h}{d} - \frac{h}{1-d}\right)(\delta(t+d) - \delta(t-d)) = \frac{h}{d(1-d)}\;(\delta(t+d) - \delta(t-d)). \qquad (\dagger)$$

Deriverar man syntesekvationen 2 ggr får man att $x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pi i\, n)^2 c_n\, e^{\pi i n t}$. Här avläser man att x'':s fourierkoefficienter $(\pi i\, n)^2 c_n = -\pi^2 n^2 c_n$ erhålls ur

$$-\pi^2 n^2 c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x''(t)\, e^{-\pi i n t}\, dt = \frac{h}{2d(1-d)}\left(\int_{-1}^{1} \delta(t+d)\, e^{-\pi i n t}\, dt - \int_{-1}^{1} \delta(t-d)\, e^{-\pi i n t}\, dt\right) =$$

$$= \frac{h}{2d(1-d)}\;(e^{\pi i n d} - e^{-\pi i n d}) = \frac{ih}{d(1-d)}\;\sin(\pi n d), \text{ varav för } n \ne 0:$$

$$c_n = -\frac{ih}{\pi^2 n^2 d(1-d)}\;\sin(\pi n d),$$

Återstår att beräkna c_0 som enligt analysekvationen är $= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t$, d.v.s. funktionens medelvärde över en period. Detta medelvärde är i det här fallet uppenbarligen = 0.
Vi får alltså fourierserien

$$x(t) = -\frac{\mathrm{i}h}{\pi^2 d(1-d)} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(\pi n d)}{n^2}\, \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} n t}.$$

Anmärkning: Alternativt kan man få fram resultatet utgående från uttrycket för andraderivatan (†) och egenskapstabellen ovan: De 2-periodiska fortsättningarna av respektive funktioner nedan har enligt tabellen de angivna koefficienterna:

- $\delta(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,
- $\delta(t \pm d) \leftrightarrow \mathrm{e}^{\pm \pi n \mathrm{i} d} \cdot \frac{1}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,
- $x''(t) \leftrightarrow \frac{h}{d(1-d)} (\mathrm{e}^{-\pi n \mathrm{i} d} - \mathrm{e}^{+\pi n \mathrm{i} d}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{h\,\mathrm{i}}{d(1-d)} \sin \pi n d$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,
- För $n \neq 0$: $x(t) \leftrightarrow c_n = -\frac{1}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{h\,\mathrm{i}}{d(1-d)} \sin \pi n d$
- För $n = 0$ får vi som nyss direkt ur analysekvationen att $c_0 = 0$.

Detta ger svaret ovan. ♦

Övningar

6.3 **a.** Bestäm de komplexa fourierkoefficienterna till den 2π-periodiska funktionen $x(t)$ för vilken:

$$x(t) = t^2, \text{ då } -\pi \le t \le \pi.$$

Använd någon av beräkningsmetoderna som användes i exempel 6.2. Ange också den reella fourierseriutvecklingen.

b. Samma som a, men med 4-periodiska funktionen

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } |t| < 1 \\ 2 - |t|, & \text{då } 1 \le |t| < 2, \end{cases}$$

(Skissera först grafen!)

c. Samma som a, men med 6-periodiska funktionen

$$x(t) = \begin{cases} 3, & \text{då } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{då } 1 < t < 3, \\ 2, & \text{då } 3 < t < 5, \\ -1, & \text{då } 5 < t < 6. \end{cases}$$

(Skissera först grafen!)

6.4 **a.** Förenkla koefficienterna i fourierserien för signalen i exempel 6.2 för det fall att $d = 1/2$ och $h = 1/2$.

b. Ett (*idealt*) *lågpassfilter* släpper igenom alla harmoniska signaler upp till en viss frekvens B ograverade och ingen av de harmoniska signalerna med högre frekvens. Man vill konstruera ett lågpassfilter så att andelen förlorad energi vid filtrering av signalen i a-uppgiften blir mindre än 1%. Hur skall brytfrekvensen B då väljas? Variabeln t mäts i ms.

Använd till att börja med Parsevals relation till att verifiera, att om man väljer B [kHz] i intervallet $M + 1/2 < B < M + 3/2$ (M heltal ≥ 0), så kommer andelen förlorad energi att vara

$$1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{(2m+1)^4} .$$

6.3 Konvergensfrågor

Eftersom likheten i syntesekvationen är en likhet mellan generaliserade funktioner är det inte självklart att likheten gäller i klassisk mening, d.v.s. att

$$x(t) = \lim_{M \to \infty} \sum_{n=-M}^{M} c_n \, e^{int} ,$$

där limesbegreppet är som i den "vanliga" analysen. Detta problem är inte alldeles enkelt att reda ut, men tillräckliga villkor finns uppskrivna i kurslitteraturen, ZC Theorem 11.1., sid 492:

> Om $x(t)$ och $x'(t)$ [6] är styckvis kontinuerliga och har höger- och vänstergränsvärden i alla punkter så är
>
> $$\lim_{M \to \infty} \sum_{n=-M}^{M} c_n \, e^{int} = \frac{x(t+) + x(t-)}{2} .$$

Konvergens råder därför i praktiken "alltid", med undantag för de ställen där $x(t)$ är diskontinuerlig. Där blir seriesumman i stället = värdet mitt i språngintervallet. I närheten av sådana punkter uppträder också en komplikation som kallas *Gibbs fenomen* (se ZC sid 498.)

Förutsättningarna i konvergenssatsen ovan kan inte tas bort. Man känner exempelvis till kontinuerliga periodiska funktioner vars fourierserier inte konvergerar för alla t och än värre, integrabla funktioner vars fourierserie inte konvergerar för något enda t. Situationen kan kännas en smula obekväm!

Situationen ter sig dock mera tillfredställande om noterar att konvergensbegreppet egentligen mest används här för att på ett precist sätt kunna uttrycka att olika funktioner "ligger nära varandra".

$$\lim_{M \to \infty} \sum_{n=-M}^{M} c_n \, e^{int} = x(t)$$

får betyda att

$$\sum_{n=-M}^{M} c_n \, e^{int} \text{ "ligger godtyckligt nära" } x(t) \text{ för "tillräckligt stora" värden på } M.$$

Som vi tidigare sett (§1.2) finns det andra möjliga sätt att mäta graden av "närhet". En lämplig kandidat är att ta *energin* (under en period) hos *differensen* mellan signalerna som ett sådant mått. Att $\sum_{n=-M}^{M} c_n \, e^{int}$ "ligger godtyckligt nära" $x(t)$ för "tillräckligt stora" värden på M, får då betyda att

$$\lim_{M \to \infty} \left\| \sum_{n=-M}^{M} c_n \, e^{int} - x(t) \right\|^2 = 0, \tag{6.3}$$

där $\|\cdot\|$ definieras som i (1.19)

---

6 Derivatan i "klassisk" mening – ingen generaliserad funktion – avses här.

Viktigare för signalteorin än ovannämnda konvergenssats är att man faktiskt kan bevisa att:

> Likheten (6.3) gäller för alla L-periodiska signaler med ändlig energi/period, dvs om bara
>
> $$\|x(t)\|^2 = \oint_L |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t. < \infty$$

Inga speciella krav på kontinuitet eller deriverbarhet behövs för detta! Beviset för den satsen ligger utanför den här kursens ram.

Övning

6.5 I ett tabellverk hittar man angående 2π-periodiska fourierserier att

$$\text{om } c_n = (-1)^n \frac{1+\mathrm{i}n}{1+n^2}\text{, så är } x(t) = \frac{\pi\,\mathrm{e}^t}{\sinh \pi}\text{, då } -\pi < t < \pi.$$

a, Bestäm de exakta värdena av seriesumman då $t = 0$, $= 4$ respektive $= \pi$.

b. Bestäm med hjälp av resultatet i a-uppgiften det exakta värdet av summan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$,

Svar till uppgifterna

5.1 a. $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$, b. $\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right)$.

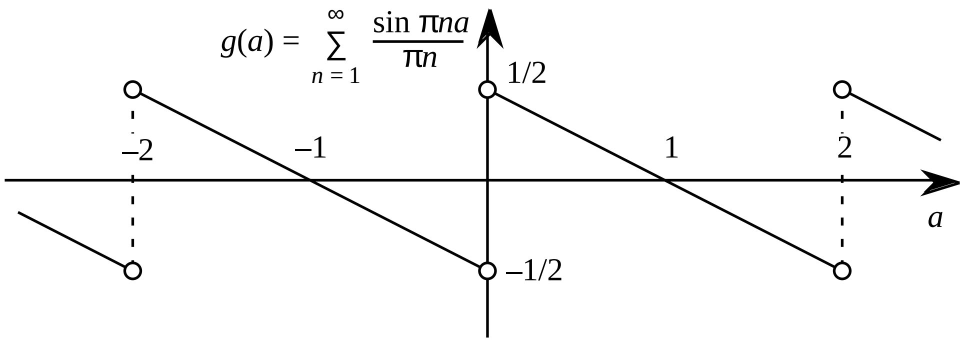
5.2 $\frac{1}{3}$.

5.5 P. (Summan av serien i uppgift 5.3 för $t = 0$, d.v.s. summan av $2M + 1 = P$ st. 1:or.)

5.7 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi\,\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} \left(= \pi\,\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = \pi \coth \pi\right).$

5.8c. $\frac{(2N+1)\pi - a}{2}$

5.9



5.10 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\pi/2)\,\delta(t - n\pi/2)$ respektive $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\pi)\,\delta(t - n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\,\delta(t - n\pi)$

	$n=$	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	…
Följderna av sampelvärden:	…	0,	1,	0,	–1,	0,	1,	0,	–1,	0,	1,	0,	–1,	…
respektive	…	–1,	1,	–1,	1,	–1,	1,	–1,	1,	–1,	1,	–1,	1,	

5.11 **a.** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)$, **b.** $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$.

5.12 $\sin t$.

5.13 $\sin(-\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.1a För $\sin 2\pi t$: $c_1 = 1/(2i)$, $c_{-1} = -1/(2i)$, $c_n = 0$ för övriga n.
För $\cos 2\pi t$: $c_1 = c_{-1} = 1/2$, $c_n = 0$ för övriga n.

6.1b $c_n = 1$ för alla k. Syntesekvationen: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/L - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t/L}$.

6.2 $c_n = \frac{2}{3\pi i n}$ om n udda, $= 0$ om n jämnt $\neq 0$, $c_0 = \frac{1}{3}$.

6.3a. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, där $c_n = 2\,\frac{(-1)^n}{n^2}$ då $n \neq 0$ och $c_0 = \frac{\pi^2}{3}$.

$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$, där $a_n = 4\,\frac{(-1)^n}{n^2}$ då $n \neq 0$ och $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$.

6.3b. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi nt/2}$, där $c_n = 2\,\dfrac{\cos(\pi n/2) - (-1)^n}{n^2\pi^2}$ då $n \neq 0$ och $c_0 = \dfrac{3}{4}$.

$x(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{\pi nt}{2}$, där $a_n = 4\,\dfrac{\cos(\pi n/2) - (-1)^n}{n^2\pi^2}$ då $n \neq 0$ och $a_0 = \dfrac{3}{2}$.

6.3c. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi nt/3}$, där $c_n = \dfrac{2 - 3\cos(\pi n/3) + (-1)^n}{in\pi}$ då $n \neq 0$ och $c_0 = 1$.

$x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{\pi nt}{3}$, där $b_n = 2\,\dfrac{2 - 3\cos(\pi n/3) + (-1)^n}{n\pi}$.

6.4 **a.** $-\dfrac{2i}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)\pi t}$

b. Om $B > 1500$ Hz så kommer andelen förlorad energi att vara < 0.3 % (om $B < 1500$ Hz så kommer andelen att vara > 1,4%.

6.5 **a.** $x(0) = \dfrac{\pi}{\sinh \pi}$, $x(4) = \dfrac{\pi e^{(4-2\pi)}}{\sinh \pi}$, $x(\pi) = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{e^{\pi}}{\sinh \pi} + \dfrac{e^{-\pi}}{\sinh \pi}\right) = \pi \coth \pi$

b. $\pi \coth \pi$.

Obs att $x(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1+in}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{1+n^2} + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{1+n^2} + i\cdot 0$, eftersom termerna i den senare summan tar ut varandra parvis.

Anmärkning: Även Parsevals relation kan användas. Man har att

$$\|x(t)\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

där $$|c_n|^2 = \left|(-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{1+n^2}\right)^2 = \frac{1}{1+n^2}$$

och $$\|x(t)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2 e^{2t}}{\sinh^2 \pi}\,dt = \frac{\pi^2}{\sinh^2 \pi}\,\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{\sinh^2 \pi}\,\frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})(e^{\pi} + e^{-\pi})}{2} = \frac{\pi^2}{\sinh^2 \pi}\cdot 2\cdot\sinh \pi \cdot \cosh \pi = 2\pi^2 \coth \pi,$$

varav $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi \coth \pi.$$