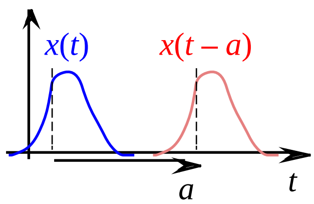
1. Geometriskt om grafer

(OW 1.2)

En av den här kursens syften är att ge de viktigaste matematiska metoderna som man använder för att bearbeta signaler av olika slag. Ofta är det så att den signal som man iakttar inte är den egentliga, utan det man ”ser” är någon slags deformation, förvrängning eller stympning av den ”riktiga”. Det är därför viktigt att på olika sätt kunna ”manipulera” grafiska bilder av signaler. Varje sådan manipulation har en analytisk (d.v.s. ”formelmässig”) motsvarighet. Vi går igenom några enkla men viktiga sådana fall. Signalen själv tänker vi oss beskriven av en funktion $x(t)$, där t ofta har (men inte måste ha) dimensionen tid.[1] Grafiskt låter vi x-axeln vara vertikal och t-axeln horisontell.

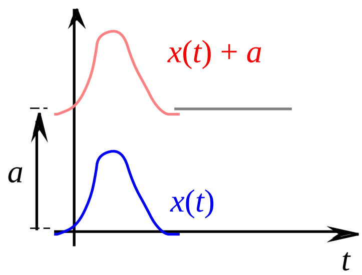
1.1 Translation i horisontell led, $x(t-a)$

Om $x(t)$ förskjuts a enheter i t-axelriktningen, så får man grafen för $x(t-a)$.



1.2 Translation i vertikal led, $x(t) + a$

Om grafen för $x(t)$ förskjuts a enheter i x-axelriktningen, så får man grafen för $x(t) + a$



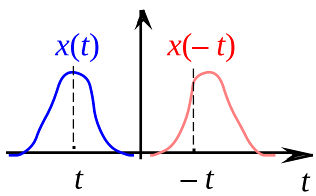
1.3 Spegling i vertikala axeln, $x(-t)$

Om grafen för $x(t)$ speglas i x-axeln, så får man grafen för $x(-t)$.

Funktioner vars grafer övergår i sig själva vid en sådan spegling kallas *jämna funktioner*. Analytiskt:

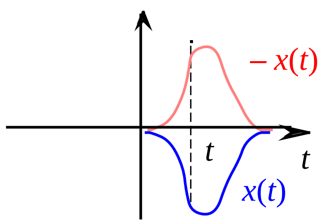
$$x(t) \text{ jämn} \Leftrightarrow x(t) = x(-t). \tag{1.1}$$

Exempel på jämna fuktioner: 1, t^2, t^n där n ett jämnt heltal, $\cos t$, $\sin^2 t$, $|t|$ och $\dfrac{\sin t}{t}$.



1.4 Spegling i horisontella axeln, $-x(t)$

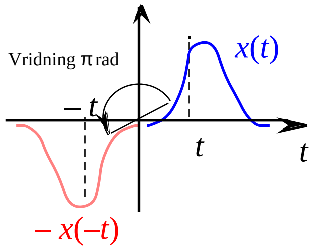
Om grafen för $x(t)$ speglas i t-axeln, så får man grafen för $-x(t)$.



1 I själva verket räcker funktionsbegreppet, så som det brukar definieras t.ex. i 1:ans grundkurser, inte riktigt för signalteorins behov, men det problemet tar vi upp först i arbetsmaterial nr 2.

1.5 Vridning ett halvt varv kring origo, $-x(-t)$

Om grafen för $x(t)$ vrids ett halvt varv kring punkten (0,0) i tx-planet, så får man grafen för $-x(-t)$.



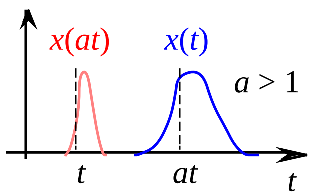
Funktioner vars grafer övergår i sig själva vid en sådan vridning kallas *udda funktioner*. Analytiskt:

$$x(t) \text{ udda} \Leftrightarrow \; -x(t) = x(-t). \qquad (1.2)$$

Exempel på udda fuktioner: t, t^3, t^n där n ett udda heltal,

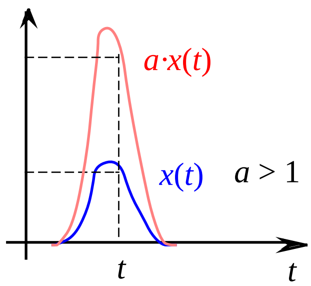
$\sin t$, $\tan t$, $\operatorname{sgn} t \left(= \frac{t}{|t|}\right)$

1.6 Skalning i horisontell led, $x(at)$



Om grafen för $x(t)$ trycks ihop (resp. töjs) så att avstånden till x-axeln blir $\frac{1}{a}$ ggr mindre ($a>1$) resp. större ($0<a<1$), så får man grafen för $x(at)$,

1.7 Skalning i vertikal led, $a \cdot x(t)$



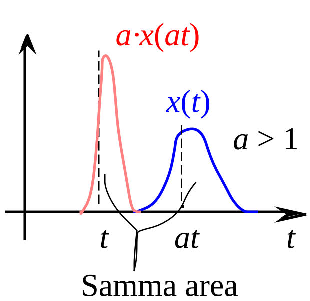
Om grafen för $x(t)$ töjs (resp. trycks ihop) så att avstånden till t-axeln blir a ggr större ($a>1$) resp. mindre ($0<a<1$), så får man grafen för $a \cdot x(t)$.

1.8 Areabevarande skalning, $a \cdot x(at)$

Grafen för $a \cdot x(at)$, $a > 1$, erhålls genom att grafen för $x(t)$ trycks ihop i t-led och töjs i x-led. ”Areorna” mellan graferna och t-axeln är då densamma i båda fallen, ty

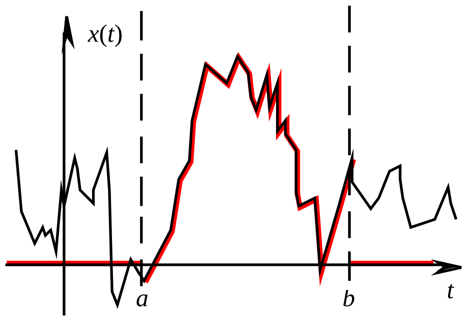
$$\int_{-\infty}^{\infty} a \cdot x(at)\, dt = \left[\text{Subst } at \to t\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt.$$

(Detsamma gäller om $0 < a < 1$, men då är det fråga om töjning i t-led och hoptryckning x-led.)



1.9 Trunkering[2]. Rektangelfunktioner

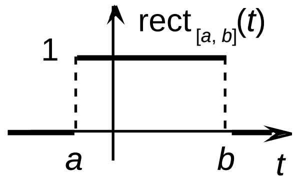
Om en signal iakttas under ett kortare tidsintervall än sin totala varaktighet, så har man att göra med en trunkerad signal. I figuren här bredvid har man ”skurit ut” den del (**fet linje**) av signalgrafen $x(t)$ (tunn linje) som ligger i intervallet $a \le t \le b$ och ”glömt” den del som ligger utanför intervallet. Analytiskt kan man beskriva detta genom att införa den ”trunkerade” funktionen:



$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & \text{då } a < t < b, \\ 0, & \text{då } t > b \text{ eller } t < a. \end{cases}$$ [3]

Ofta vill man dock så långt möjligt undvika att använda klammersymbolen. Man kan få en mera koncis beskrivning av den trunkerade funktionen genom att till menageriet av standardformler foga s.k. *rektangelfunktioner*:

Om $a < b$ $$\operatorname{rect}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } a < t < b, \\ 0, & \text{då } t > b \text{ eller } t < a. \end{cases}$$



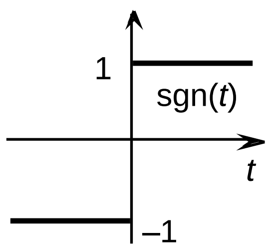
Den trunkerade funktionen ges då av

$$x_T(t) = x(t) \cdot \operatorname{rect}_{[a,b]}(t).$$

Rektangelfunktionerna hör till de *sträckvis konstanta* funktionerna och är nära släkt med två andra sådana funktioner, som också fått något så när vedertagna namn:

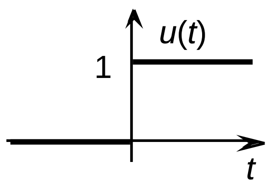
Signumfunktionen:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 < t, \\ -1, & \text{då } t < 0. \end{cases} \qquad (1.3)$$



Enhetssprånget, (”the unit-step-function”, Heavisides funktion[4])

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 < t, \\ 0, & \text{då } t < 0. \end{cases} \qquad (1.4)$$



Man har att

$$\operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1, \; u(t) = \frac{\operatorname{sgn}(t) + 1}{2},$$

och om $a < b$ $$\operatorname{rect}_{[a,b]}(t) = u(t-a) - u(t-b) = u(t-a) \cdot u(b-t).$$ (Kontrollera detta!)

---

2 Ordet betyder ”avhuggning” och kommer ursprungligen från det latinska verbet för ”hugga av”, *trunco*. På engelska heter det *truncation*.

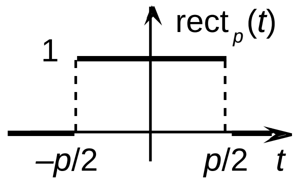
3 Den nogranne undrar kanske vad som händer med x:s värden för $t = a$ och b. Det problemet (som egentligen inte är något problem) kommenteras närmare längre fram (§3.2.4).

4 Efter *Oliver Heaviside*, brittisk fysiker och ingenjör, 1850 – 1925. Införde funktionen ifråga vid sina kalkyler inom elläran. Beteckningen för den är tyvärr inte standardiserad (än?). I amerikansk litteratur (som Oppenheim -Willsky) skrivs ofta u. En annan vanlig beteckning är H, medan uppslagsverket β använder sig av θ!

Man har också infört beteckningen

$$\mathrm{rect}_p(t)$$

för $\mathrm{rect}_{[-p/2,p/2]}(t)$, d.v.s. för rektangelfunktionen som är = 1 i ett intervall av längd p, symmetriskt beläget kring origo. Funktionen i fråga är jämn. Om $p = 1$ skriver vi också rect (t). Alltså:



$$\mathrm{rect}_p(t) = \begin{cases} 1, \text{ om } |t| < p/2, \\ 0, \text{ om } |t| > p/2. \end{cases} \quad \text{och} \quad \mathrm{rect}\,(t) = \begin{cases} 1, \text{ om } |t| < 1/2, \\ 0, \text{ om } |t| > 1/2. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Övningar:

1.1 Skissera i samma diagram graferna till:

a. $\sin t$, $\sin 2t$ och $\sin \frac{t}{2}$,

b. $\sin t$, $2 \sin t$ och $\frac{1}{2} \sin t$.

1.2 a. Skissera grafen till

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t - 1|, & \text{då } 0 \le t \le 2, \\ 0, & \text{då } t > 2 \text{ eller } t < 0 \end{cases} \qquad (*)$$

och skissera sedan graferna för

b. $y(t) = x(-t)$, c. $y(t) = -x(t)$, d. $y(t) = -x(-t)$,

e. $y(t) = x(2t)$, f. $y(t) = x(t/2)$, g. $y(t) = x(t + 1)$,

h. $y(t) = 10\, x(10\, t)$, i. $y(t) = (x(t))^{100}$.

j. Ge en ”formelbeskrivning” i samma stil som (*) för funktionen $y(t) = x(2t)$.

1.3 a. Verifiera att $y(t) = x(t) + x(-t)$ är en jämn och att $z(t) = x(t) - x(-t)$ är en udda funktion.

b. Eftersom $x(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2} + \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$, så kan tydligen varje funktion skrivas som en summa av en jämn och en udda funktion. Visa att det bara finns en sådan omskrivning, d.v.s. om

$$x(t) = x_j(t) + x_u(t), \text{ där } x_j \text{ är jämn och } x_u \text{ udda}, \qquad (**)$$

så är

$$x_j(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \text{ och } x_u(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Ledning: Kombinera likheten (**) med den man får då t byts mot $-t$.

Funktionerna x_j och x_u i uppgift 1.3b. brukar kallas den *jämna* respektive *udda delen* av funktionen x.

I OW (§1.2.3) betecknas de $\mathcal{E}v\{x(t)\}$ respektive $\mathcal{O}d\{x(t)\}$.

1.4 Vilka är de jämna respektive udda delarna till

a. e^{t}, b. e^{jt}, c. $\dfrac{1}{1-t}$.

1.5 Verifiera att

a. $\mathrm{rect}_P(t) = \mathrm{rect}(t/P)$, b. $\mathrm{rect}_{[a,\,b]}(t) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{2t - a - b}{2(b-a)}\right)$

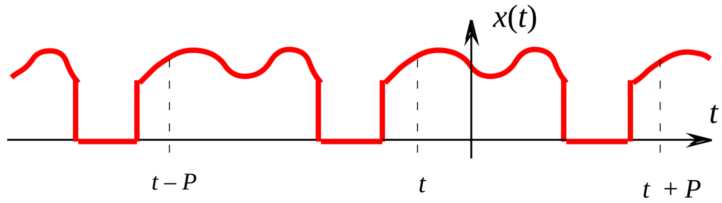
Fler övningar: Oppenheim-Willsky 1.21a-e, 22a.e, 23.

2. Om periodiska funktioner och periodisk fortsättning

Man säger att en funktion $x(t)$ är *periodisk* med *periodlängd P* (eller kortare *P-periodisk*) om

$$P \neq 0 \text{ och } x(t + P) = x(t) \text{ för alla } t.$$

Graferna för sådana funktioner karakteriseras tydligen (jämför §1.1 ovan) av att de övergår i sig själva då de förskjuts P, $2P$, $3P$, … längdenheter i åt vänster eller höger.



Välkända exempel på periodiska funktioner är de trigonometriska funktionerna cos t och sin t (2π-periodiska), samt tan x och cot x (π-periodiska). Mera udda exempel utgör konstanterna, $x(t) = C$, som tydligen är P-periodiska för vilket P som helst.

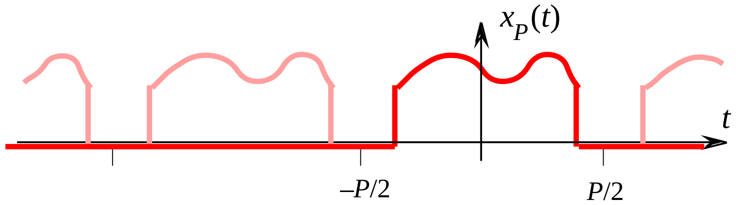
Om en funktion är P-periodisk så är den automatiskt också $2P$-periodisk, $3P$-periodisk, $4P$-periodisk o.s.v. – exempelvis är tan t också 2π-periodisk. Bortsett från de konstanta funktionerna, så kan man visa att det i alla i praktiken intressanta fall alltid finns en *minsta positiv* period till varje periodisk funktion.[5] Den periodlängden kallas *fundamentalperioden*. För de trigonometriska funktionerna i det föregående stycket angavs just deras fundamentalperioder. Konstanterna har ingen fundamentalperiod.

Övningar:

2.1 Bestäm fundamentalperioderna till
a. $\cos t \sin t$, b. $|\cos t|$, c. $\tan \pi t$.

2.2 Verfiera att $x(t) = t - \lfloor t \rfloor$, där $\lfloor t \rfloor$ = största heltalet $\leq t$, är periodisk och ange dess fundamentalperiod.

Om man från grafen till en P-periodisk funktion ersätter allt som ligger utanför ett t-intervall med längden P, t.ex. intervallet $-P/2 < t \leq P/2$, med motsvarande del av t-axeln så kan man säga att man har ”skurit ut” en period av grafen,



Analytiskt kan man beskriva denna ”stympning” med, att man bildar funktionen

$$x_P(t) = \begin{cases} x(t), & \text{om } -P/2 < t \leq P/2, \\ 0, & \text{för alla övriga } t. \end{cases} = x(t) \cdot \mathrm{rect}_P(t).$$

Man säger att $x(t)$ är den *P-periodiska fortsättningen* till $x_P(t)$. Funktionen $x(t)$ kan återskapas från $x_P(t)$ genom att man adderar funktionerna $x_P(t - nP)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

---

5 Mera precist gäller: Om en icke-konstant funktion $x(t)$ är periodisk och kontinuerlig i åtminstone en punkt så har funktionen en minsta positiv period som alla andra är heltalsmultipler av. Beviset för detta är inte alldeles enkelt och utelämnas.

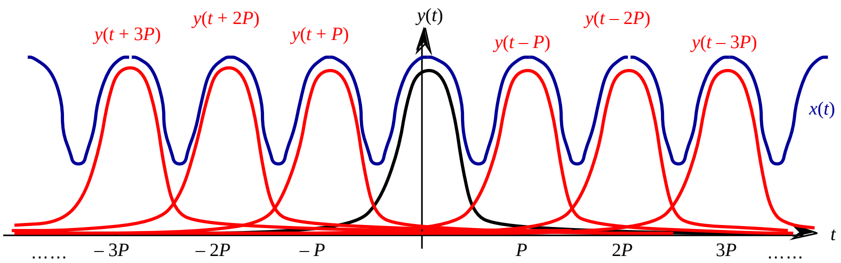
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_P(t - nP). \tag{1.6}$$

Lägg märke till att en funktion $x(t)$ som är definierad av ett samband av typen (1.6) alltid är P-periodisk – och detta alldeles oavsett vilken funktion x_P man utgår ifrån – bara den oändliga serien konvergerar.

Mera generellt har man kommit överens om:

Definition: (Periodisk fortsättning av funktion)

Funktionen
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nP)$$
sägs vara den *P-periodiska fortsättningen* av funktionen $y(t)$ – förutsatt att serien är konvergent.

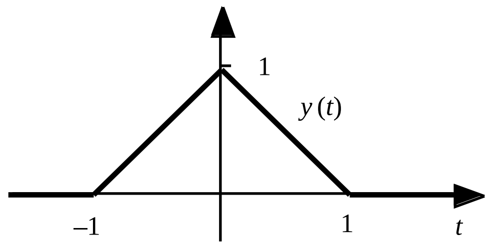


Exempel 2.1

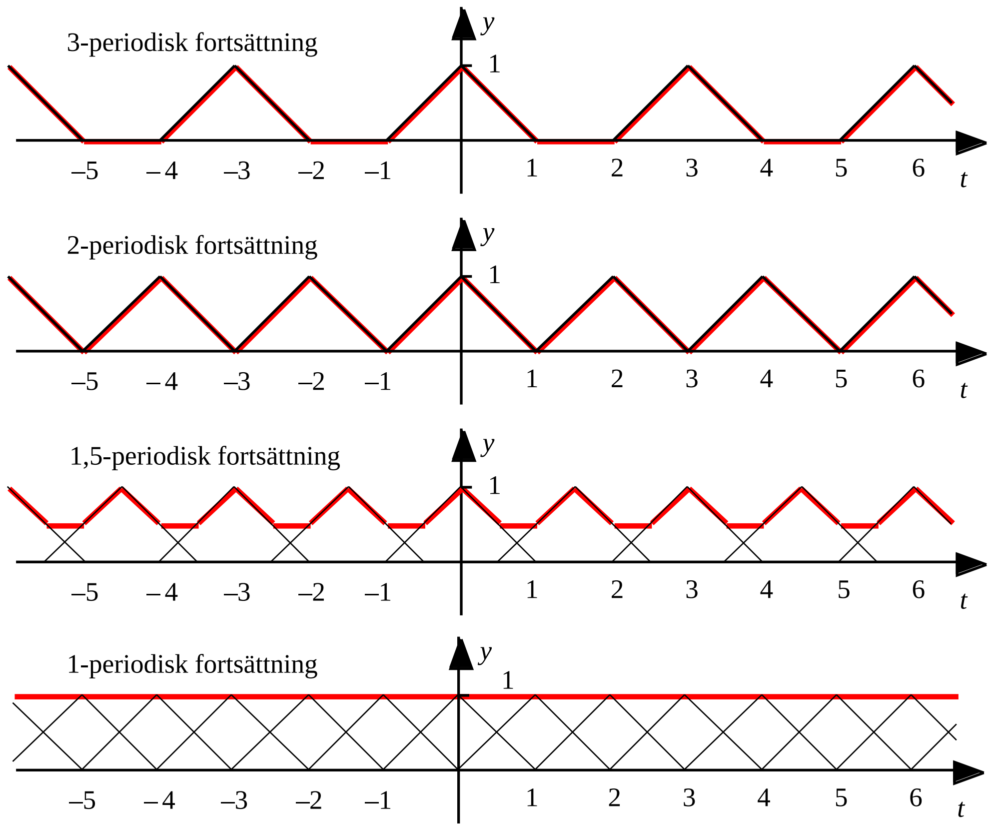
Grafen av funktionen

$$y(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{då } |t| \le 1, \\ 0, & \text{då } |t| > 1, \end{cases}$$

har skissats i figuren här bredvid.



De P-periodiska fortsättningarna till denna för $P = 3$, 2, 3/2, och 1 har då följande grafer: (Kontrollera detta som en övning!)



Övningar:

2.3 Skriv upp analytiska uttryck för de 3-, 2- och 1,5-periodiska fortsättningarna i exemplet ovan. Välj att göra detta i intervall symmetriska kring origo och med respektive fundamentalperiods längd.

2.4 Skissera den 3-periodiska fortsättningen till

$$x(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{då } |t| \le 1, \\ |t| - 1, & \text{då } 1 < |t| \le 2, \\ 0, & \text{då } |t| > 2. \end{cases}$$

2.5 Vilken är den 1-periodiska fortsättningen av

$$x(t) = \begin{cases} 2^{-t}, & \text{då } t > 0, \\ 0, & \text{då } t \le 0, \end{cases}$$

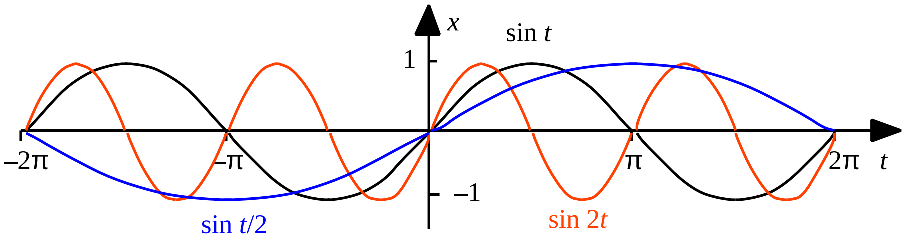
i fundamentalintervallet $0 < t \le 1$?

Ledning: $1 + k + k^2 + \ldots + k^n + \ldots = 1/(1 - k)$ om $|k| < 1$.

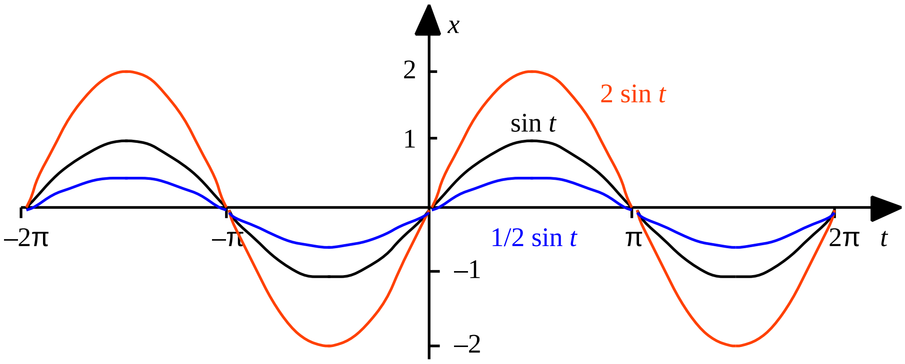
Fler övningar: OW 1.25, 26.

Svar till övningarna:

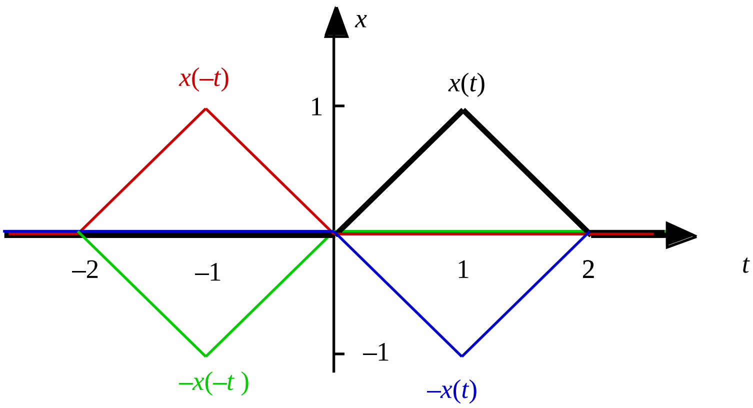
1.1 a,



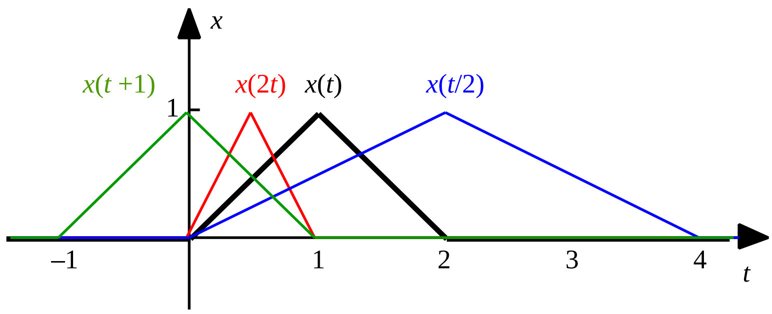
b.



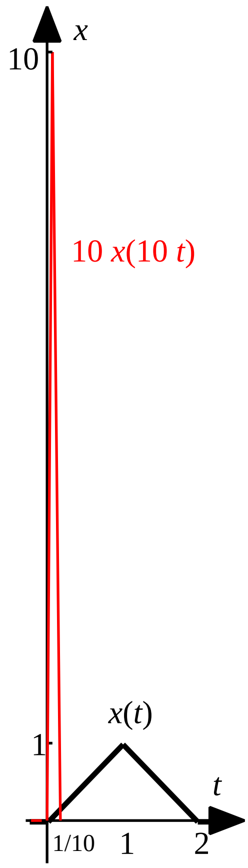
1.2 a. – d.



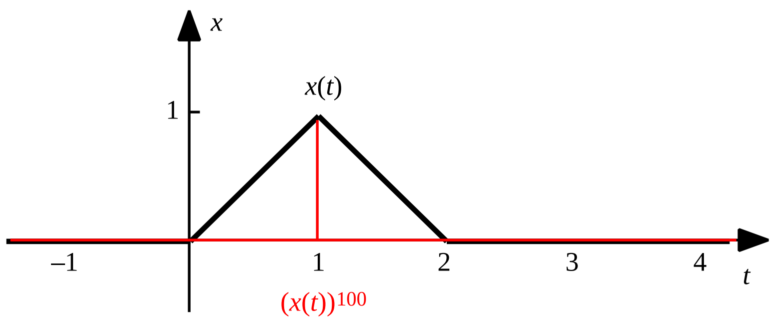
a., e. – g.



a., h.



a., i.



1.3 b. $x(t) = x_j(t) + x_u(t)$ $\quad x(-t) = x_j(-t) + x_u(-t) = x_j(t) - x_u(t)$. Summation och subtraktion av dessa likheter ger $x(t) + x(-t) = 2x_j(t)$ och $x(t) - x(-t) = 2x_u(t)$.

1.4 a. cosh t och sinh t, b. cos t och j sin t, c. $\dfrac{1}{1-t^2}$ och $\dfrac{t}{1-t^2}$.

1.5 a. Obs. att man får grafen för rect_P om man töjer (drar ihop) grafen för rect_1 med en faktor P.

b. Obs. att man får grafen för $\text{rect}_{[a,\,b]}$ om man förskjuter rect_P där $P = b - a$ med $(a + b)/2$ åt höger (om detta tal > 0, annars åt vänster).

2.1 a. π, b. π, c. 1.

2.2 Fundamentalperioden är =1.

2.3 3-periodiska fortsättningen:

$$y_3(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{då } |t| \le 1, \\ 0, & \text{då } 1 \le |t| \le 1{,}5, \end{cases} \quad y_3(t) = y_3(t-3).$$

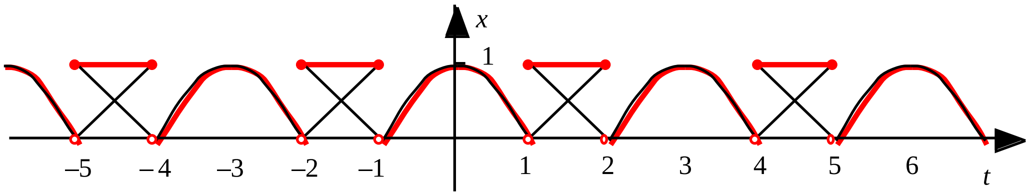
2-periodiska fortsättningen:

$$y_2(t) = 1 - |t|, \text{ då } |t| \le 1, \; y_2(t) = y_2(t-2).$$

1,5-periodiska fortsättningen:

$$y_{3/2}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{då } |t| \le 0{,}5, \\ 0{,}5, & \text{då } 0{,}5 \le |t| \le 0{,}75, \end{cases} \quad y_{1,5}(t) = y_{1,5}(t-1{,}5).$$

2.4



2.5 $x_1(t) = 2^{-(t-1)}$, då $0 < t \leq 1$.