

4. Några viktiga summations- och integrationsformler.

Först en repetition:

4.1 Geometriska serier

För godtyckliga komplexa tal a och k gäller

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = s = \begin{cases} a \frac{1-k^n}{1-k}, & \text{om } k \neq 1, \\ a n, & \text{om } k = 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Bevis: Om $a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = s$,
så är $ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} + ak^n = ks$,
varav efter subtraktion,

$$a(1-k^n) = (1-k)s \quad a \frac{1-k^n}{1-k}, \quad (\text{om } k \neq 1).$$

Om $k = 1$, så är s summan av n st tal a , d.v.s. $= na$.

Övningar:

4.1 Summera

a. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots + \frac{2^{99}}{3^{100}},$

b. $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \dots - \frac{2^{99}}{3^{100}}.$

4.2 I sambandet $\frac{1+k+k^2+k^3+\dots+k^n}{1-k+k^2-k^3+\dots-k^n} = 2$ är n ett udda heltal ≥ 1 . Bestäm k .

4.3 En bank ger ränta $p\%$ årligen med ränteutbetalning vid årets slut. Varje år under sammanlagt n år sätts a kr in på ett konto den 2 januari. Hur stort blir kapitalet efter det n :te årets slut om inga uttag görs?

4.4 Summera $x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} + y^n$, då n är ett heltal ≥ 2 .

4.5 Verifiera att summan

$$e^{-Mt} + e^{-(M-1)t} + \dots + e^{-t} + 1 + e^t + \dots + e^{(M-1)t} + e^{Mt}$$

för $t \geq 0$ kan skrivas

$$\frac{e^{Pt/2} - e^{-Pt/2}}{e^{t/2} - e^{-t/2}} = \frac{\sinh Pt/2}{\sinh t/2},$$

där P är antalet termer i summan.

4.6 Summan (4.1) ovan är tydligen en polynom i variabeln k och måste därför vara kontinuerlig. Speciellt måste summans värde för $k = 1$ vara $= \lim_{k \rightarrow 1} a \frac{1-k^n}{1-k}$,

$$\lim_{k \rightarrow 1} a \frac{1-k^n}{1-k},$$

Verifiera detta genom att direkt beräkna gränsvärdet t.ex. med hjälp av l'Hospitals regel.

4.7 Vilket värde har $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sinh Pt/2}{\sinh t/2}$?

De komplexa exponentialfunktionerna av typen $e^{j\omega t}$, där ω och t är reella, tilldrar sig ett speciellt intresse inom signalteorin. Vi skall i de följande avsnitten titta närmare på vissa enkla summor och integraler av sådana funktioner. Det visar sig nämligen att det finns oväntade samband mellan sådana summor och δ -pulserna. Sambanden är hörnstenar inom den matematiska teori – fourieranalysen – som spelar en stor roll inom signalteorin.

4.2 Summation av harmoniska vågor (e^{j t}-funktioner), pulståg

4.2.1 Först en kommentar till vissa variabelval:

Värdet av funktionen e^{j t}, där t är reellt, är som vi vet ett komplext tal med belopp 1 och med argumentvinkeln t mätt i radianer. Om t har tidsdimension så kan man åskådliggöra funktionen som en rörlig pekare fäst i origo i planet. Pekaren snurrar med en vinkelhastighet på radianer/sek – moturs om > 0. Att man oftast valt just radianmättet som vinkelmått beror bl.a. på att deriveringsformlerna för den komplexa exponentialfunktionen (och därmed sinus- och cosinusfunktionerna) blir speciellt enkla.

Exempelvis är som bekant $\frac{d}{dv} \sin v = \cos v$, om v mäts i radianer, medan $\frac{d}{dv} \sin v^\circ = \frac{1}{180} \cos v^\circ$, om v mäts i grader. Trots att radianmättet verkar vara ”bäst” i matematiska sammanhang kan det i vissa fall ändå vara fördelaktigt att välja ett annat vinkelmått. Ett ”naturligt” sådant är att ta ett varv som enhet. Ett varv motsvarar då 2 radianer respektive 360°. En pekare som roterar f varv/sek (dvs. f Herz) har då en vinkelhastighet på 2 f radianer/sek. Vi har alltså

$$= 2 f.$$

4.2.2 Summation av harmoniska funktioner

Vi tittar nu närmare på summor av heltalspotenser av e^{j t}-funktioner. För att hyfsa formlerna litet sätter vi $t = \frac{2\pi}{P} n$ och $\frac{2\pi}{P} = \omega = 2\pi f$.

Summan

$$S_P(n) = e^{-jM} + e^{-j(M-1)} + \dots + e^{-j} + 1 + e^j + \dots + e^{j(M-1)} + e^{jM} = \sum_{n=-M}^M e^{jn}.$$

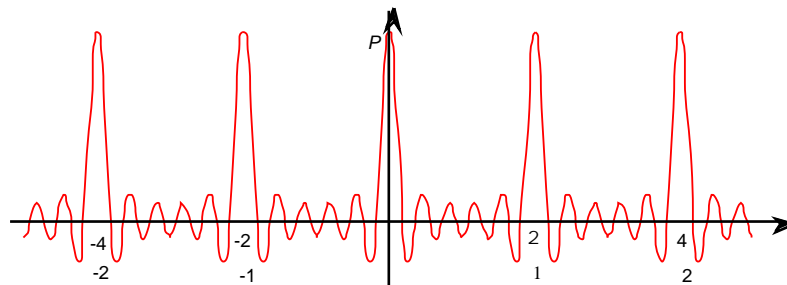
är en geometrisk serie med kvot e^j, första term e^{-jM} och med P stycken termer, där P är det udda talet 2M + 1. För e^j ≠ 1 får man därför summan

$$\begin{aligned} S_P(n) &= e^{-jM} \frac{e^{j(2M+1)} - 1}{e^j - 1} = e^{-jM} \cdot \frac{e^{j(2M+1)/2} - e^{-j(2M+1)/2}}{e^{j/2} - e^{-j/2}} = \\ &= \frac{e^{j(2M+1)/2} - e^{-j(2M+1)/2}}{e^{j/2} - e^{-j/2}} = \frac{\sin P/2}{\sin 1/2}. \end{aligned}$$

För e^j = 1, dvs ω = 2π × heltal, är summan istället = P. Notera att termerna i summan alla är 2π-periodiska i variabeln n, detsamma gäller då förstås också summan. Väljer man i stället varvfrekvensen f som vinkelmått, så får man istället den 1-periodiska summan:

$$S_P(2\pi n) = \frac{\sin P}{\sin 2\pi n/P} \text{ utom när } 2\pi n/P = \text{heltal, då summan} = P.$$

Summan är tydligen alltid reell och som funktion av n har dess graf principutseendet:



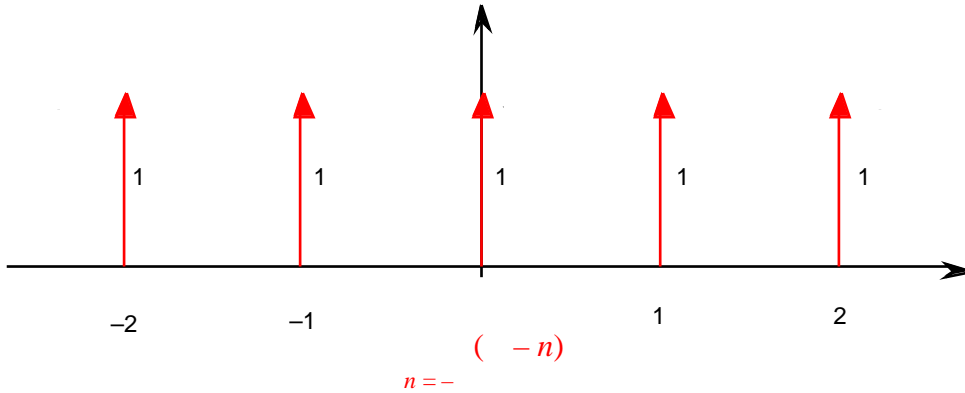
Funktionen är periodisk med periodlängd 1, och dess 0-ställen i intervallet 0 < n < 2 (0 < n < 1) är $n = 1/P, 2/P, \dots, (P-1)/P$ ($n = 1/P, 2/P, \dots, (P-1)/P$)¹

Man kan visa att

¹ I figuren är P = 11.

b
 $S_P(2) = \begin{cases} 1, & \text{om intervallet } a < \dots < b \text{ innehåller precis en heltalspunkt,} \\ 0, & \text{om intervallet } a < \dots < b \text{ inte innehåller någon heltalspunkt,} \end{cases}$ då $P = \dots$.

Funktionen kommer alltså för stora P att approximativt motsvara enhetspulser vid punkterna $\dots = \text{heltal}$. Funktionen representerar ett så kallat *pulståg* – ”enhetspulståget”.



Resultatet kan med hjälp av generaliserade funktioner uttryckas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) \quad (4.2)$$

Övning:

4.8 ”Skala” (4.2) genom att sätta $\dots = t/T$ (t variabel, T konstant > 0). Utnyttja sambandet (6) för att verifiera att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt/T} = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (T\text{-periodiska fallet}) \quad (4.2')$$

och speciellt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt} = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n) \quad (2\text{-periodiska fallet}) \quad (4.2'')$$

Sambanden (4.2) – (4.2'') är alltså likheter mellan *generaliserade* funktioner och är med den klassiska analysens synsätt meningslösheter. Exempelvis är vänsterleden divergenta serier² som saknar (klassisk) summa! Inte desto mindre kan man använda sambanden för att förhållandevis lätt härleda ”klassiska” resultat som är mycket svåra att få fram med andra metoder.

Exempel 4.1

Om man t.ex. multiplicerar ekvationen (4.2'') med en funktion $x(t)$ som är kontinuerlig åtminstone i punkterna $2n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, får man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jnt} = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - 2n) = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n) \delta(t - 2n) \quad (4.3)$$

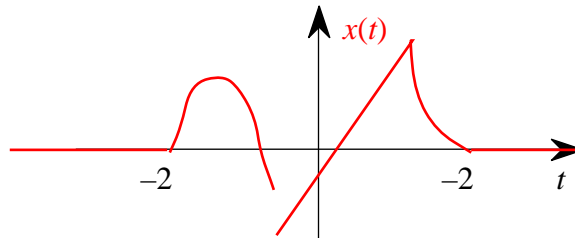
och sedan integrerar leden över hela reella axeln, så får man en mycket generell summationsformel:

² En i klassisk mening konvergent series termer måste $\dots = 0$. Termerna i summan i vänster led har alla beloppet 1 så den kan inte vara konvergent.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jnt} dt = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) (t - 2n) dt = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n) \quad (4.4)$$

Anmärkning: Detta samband är (ett speciellt fall) av den s.k. *Poissonska summationsformeln*. För att den skall vara giltig i "klassisk" mening måste funktionen $x(t)$ ha en del "snällhetsegenskaper" (krav på konvergens av ytterledens summor och integral t.ex.). Vi går dock inte in på detta närmare här. Litet slarvigt kan man säga att den i praktiskt förekommande fall stämmer om ytterleden är meningsfulla från "klassisk" synpunkt.

För exempelvis de fall då funktionen x är $= 0$ utanför intervallet $-2 < t < 2$ men inom detta intervall, förutom att vara kontinuerlig i $t = 0$ och ± 2 , varierar på ett godtyckligt sätt,



så förenklas högerledet i (4.4) till en enda term $2 \cdot x(0)$ och man får sambandet:

$$\text{Om } c_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jnt} dt, \text{ så är } c_n = 2 \cdot x(0) \quad (4.5)$$

T.ex;

Låt $x(t) = \text{rect}_{2a}(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } |t| < a, \\ 0 & \text{om } |t| > a, \end{cases}$ där $0 < a < 2$. Då vet vi enligt ovan att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jnt} dt = 2 \cdot x(0) = 2.$$

Integralen i vänsterledet är inte svår att beräkna:

$$c_n = \int_{-2}^2 x(t) e^{jnt} dt = \int_{-a}^a 1 \cdot e^{jnt} dt = \text{Om } n \neq 0 = \frac{e^{jnt}}{jn} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{jna} - e^{-jna}}{jn} = \frac{2 \sin na}{n}$$

och för $n = 0$:

$$c_0 = \int_{-2}^2 x(t) \cdot 1 dt = \int_{-a}^a dt = 2a.$$

Noterar man att $c_n = c_{-n}$, så kan summan, vars värde vi vet är 2 , skrivas

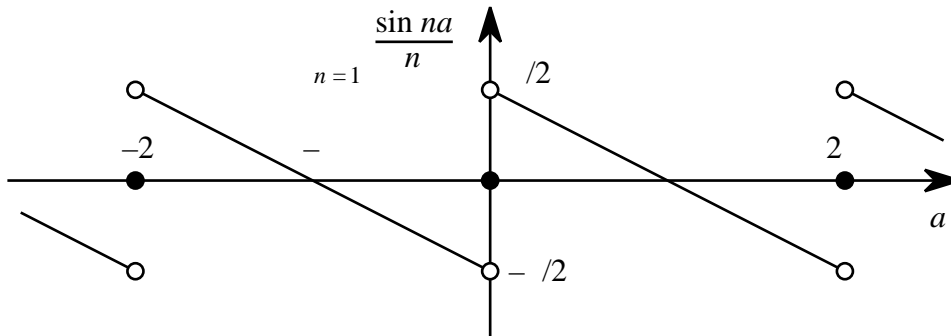
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2a + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin na}{n} = 2$$

Man får alltså sambandet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} = \frac{-a}{2}, \text{ för } 0 < a < 2 \text{ .}$$

Observerar man att vänsterledet, som funktion av a , är 2 -periodiskt och att det för $a = 0$ är $= 0$, så förstår man att summan är = den 2 -periodiska fortsättningen av funktionen

$$y(a) = \begin{cases} (-a)/2 & \text{om } 0 < a < 2 \text{ ,} \\ 0, & \text{om } a = 0, \end{cases}$$



Övning:

4.9 Plotta (t.ex med hjälp av MatLab) graferna för $\sum_{n=1}^M \frac{\sin na}{n}$, då $M = 1, 5$ respektive 11 .

4.10 Använd resultaten från övning 3.9b (sid 18) och exempel 3.6 (sid 17) för att visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n + \cos n - 1}{n^2} = -\frac{1}{4} \text{ och } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n - n \cos n}{n^3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}.$$

***4.11** Låt

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{om } |t| < 1, \\ 0, & \text{om } |t| > 1. \end{cases}$$

Vilken serie och seriesumma ger sambandet (4.2) med detta $x(t)$?

4.3 Sampling multiplikation med pulståg

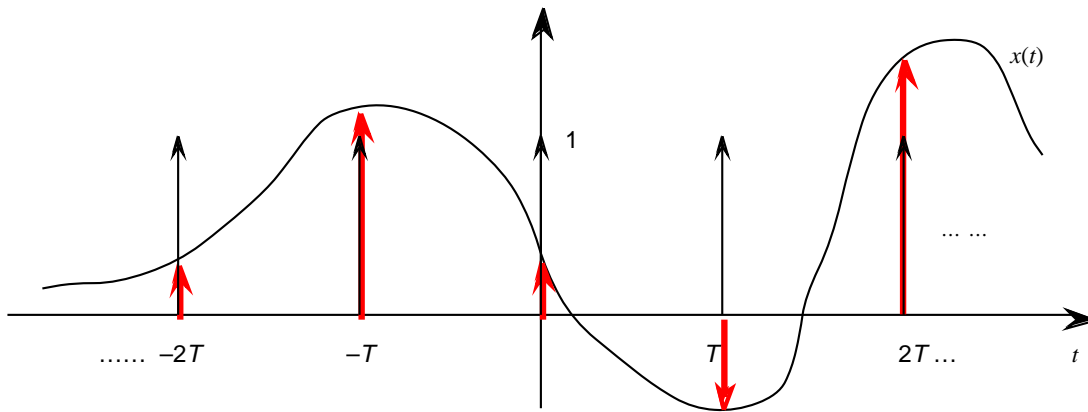
Inkommande kontinuerligt definierade signaler $x(t)$ kan i allmänhet inte avläsas vid alla tidpunkter. Mer realistiskt är att de avläses vid tidpunkter $t = nT$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$: Man säger då att man *samplear* signalen med *sampelavståndet* T . *Sampelvärdena* ges då av följderna $x[n] = x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Anmärkningsvärt nog kan motsvarande analytiska procedur koncist uttryckas med hjälp av pulstågs-

funktionen, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Den samplade signalen svarar nämligen mot pulståget:

$n = -$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



$$x(nT) \cdot \delta(t - nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Sampling med samplingsavståndet T av en kontinuerlig signal svarar mot att signalen multipliceras med pulståget

$$T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Övningar

4.12 Låt $x(t) = \cos t$. Skriv upp analytiska uttryck för sampelfunktionerna för sampelavstånden $T = \pi/2$ respektive π . Vilka är följderna av sampelvärden i de båda fallen?

4.13 Låt $x_T(t)$ vara samplingen av signalen $x(t)$ med sampelavståndet T .

a. Beräkna $I_T = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) dt$.

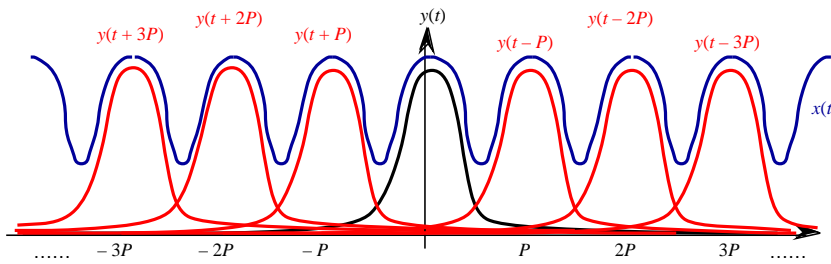
b. Vad bör gränsvärdet $\lim_{T \rightarrow 0+} T I_T$ rimligtvis ha för värde? (Rita figur!)

4.4 Periodisk fortsättning faltning med pulståg

Det visar sig att också operationen "att bilda den P -periodiska fortsättningen till en signal" har att göra med pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nP)$: Låt $x(t)$ vara den P -periodiska fortsättningen av funktionen $y(t)$:³

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nP)$$

³ Se sidan 6 i arbetsmaterial 1.



Nu har man att $y(t - nP) = y(t - nP)$ d, varför

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nP) d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nP) d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nP) d. \quad (4.6)$$

där $p(t)$ är pulståget $(t - nP)$

Den räkneoperation man gör med funktionerna $x(t)$ och $p(t)$ i högra ledet i (4.6) är exempel på en så kallad *faltning* (eng. *convolution*). Allmänt definieras faltning $y * z$ mellan två funktioner $y(t)$ och $z(t)$ av

$$(y * z)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) z(t - \tau) d\tau. \quad (4.7)$$

Faltningen skall ses som ett "räknesätt" mellan *funktioner* som producerar en ny funktion ur två givna. Den visar sig spela en viktig roll i fourieranalysen.

Sammanfattningsvis:

P-periodisk fortsättning av en signal svarar mot att signalen *faltas* med pulståget $(t - nP)$.

Övning

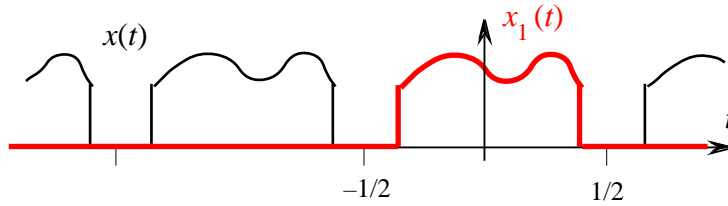
4.14 Förenkla $(\sin t \cdot \text{rect}_2(t)) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - 2n)$. (Rita figur!)

4.15 Beräkna $y(3/4)$ då $y(t) = (\sin t \cdot \text{rect}(t)) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - n)$. (Rita figur!)

5. Fourierserier och fourierutveckling

5.1 Syntes- och analysekvationerna (OW (3.1), 3.3.1, 3.3.2)⁴

Låt $x(t)$ vara en 1-periodisk funktion. Funktionen $x_1(t) = x(t) \cdot \text{rect}_1(t)$ beskriver då x :s värden i fundamentalintervallet $-1/2 < t < 1/2$ och $x(t)$ är den 1-periodiska fortsättningen av $x_1(t)$.



d.v.s.
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - n) \quad \text{där} \quad x_1(t) = \int_{-1/2}^{1/2} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Summationsformeln (4.2):
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n),$$

gör det möjligt att skriva om uttrycket för $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - n) \int_{-1/2}^{1/2} e^{jn(t - \tau)} d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} x_1(\tau) e^{jnt} e^{-jn\tau} d\tau.$$

Här är $e^{jn(t - \tau)} = e^{jnt} \cdot e^{-jn\tau}$, där den första faktorn tydligen är oberoende av integrationsvariabeln τ , alltså

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-jn\tau} d\tau \cdot e^{jnt}.$$

Men $x_1(\tau) = 0$ utanför intervallet $-1/2 < \tau < 1/2$ och $= x(\tau)$ inom det intervallet, varför

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-jn\tau} d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} x(\tau) e^{-jn\tau} d\tau,$$

vilket ger

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jnt},$$

där $a_n = \int_{-1/2}^{1/2} x(\tau) e^{-jn\tau} d\tau.$

Detta är (den komplexa varianten) av *Fouriers sats om serieutveckling av 1-periodiska funktioner*. Den första ekvationen kallas *syntesekvationen* och den andra *analyseekvationen*.

För periodiska funktioner med godtycklig period P finns förstås motsvarande samband:

⁴ Se också Olles kompendium "Komplexa funktioner", sid 61 - 62.

$$x(t) = \sum_{n=-P/2}^{P/2} a_n e^{jnt/P}, \quad (4.8)$$

$$\text{där } a_n = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} x(\tau) e^{-jn\tau/P} d\tau. \quad (4.9)$$

Speciellt för 2-periodiska funktioner blir det

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jnt}, \quad (4.8')$$

$$\text{där } a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(\tau) e^{-jn\tau} d\tau. \quad (4.9')$$

Relationerna är mycket anmärkningsvärda bland annat eftersom $x(t)$ får ha ett godtyckligt beteende i intervallet $-P/2 \leq t \leq P/2$: Varje generaliserad funktion definierad i intervallet $-P/2 \leq t \leq P/2$ kan enligt (FS) skrivas som en (oändlig) linjär kombination av de komplexa exponentialfunktionerna

$$\dots (e^{j2t/P})^{-3}, (e^{j2t/P})^{-2}, (e^{j2t/P})^{-1}, 1, e^{j2t/P}, (e^{j2t/P})^2, (e^{j2t/P})^3, \dots,$$

d.v.s. av heltalspotenserna av funktionen $e^{j2t/P} = \cos(2t/P) + j \sin(2t/P)$.

Man kan visa att inga andra koefficienter än fourierkoefficienterna duger i syntesekvationen. Mot varje generaliserad funktion $x(t)$ i intervallet $-P/2 \leq t \leq P/2$ svarar alltså en unik en oändlig följd av (komplexa) tal, funktionens så kallade *spektrum*:

$$\dots a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$$

som tillsammans innehåller *all* information om funktionen $x(t)$.

Processen, att gå från en periodisk funktion till dess spektrum, är en *transformation* (eller *transform*), den så kallade *fourierserietransformen* (*FS*). Om man vill framhäva detta kan man skriva analyskvationen som:

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_n = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} x(\tau) e^{-jn\tau/P} d\tau, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Syntesekvationen, som ju omvänt anger vilken periodisk funktion som har spektret a_n , kan skrivas på motsvarande sätt:

$$a_n \xrightarrow{FS^{-1}} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jnt/P}.$$

Exempel 5.1:

Funktionen $y(t) = 1$, då $0 \leq t < 1$, $= 0$, om $1 \leq t < 2$, har, då den utvecklas i en 2-periodisk fourierserie fourierkoefficienterna

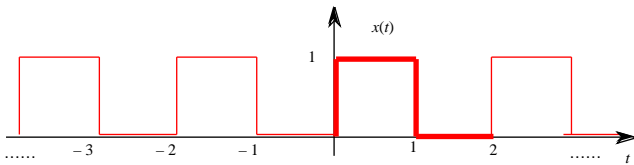
$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y(\tau) e^{-jn\tau/2} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^1 1 \cdot e^{-jn\tau/2} d\tau = \text{Om } n = 0 = \frac{e^{-jn\tau/2} \Big|_0^1}{-2jn/2} = 0 = \frac{1 - e^{-jn/2}}{-jn} = \frac{1 - e^{-jn/2}}{-jn} =$$

$$= \text{Obs att } e^{-jn} = (-1)^n, = 1 \text{ om } n \text{ jämnt, } = -1 \text{ om } n \text{ udda} = 0 \text{ om } n \text{ jämnt } \neq 0 \text{ och } = \frac{1}{jn} \text{ om } n \text{ udda.}$$

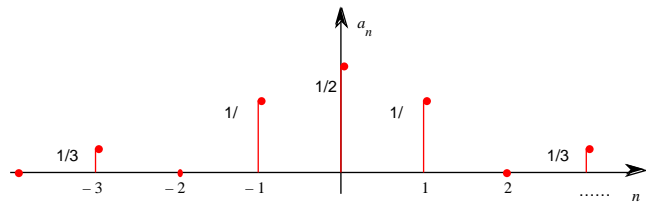
⁵ Sambanden återfinns i Oppenheim-Willsky på sid 191, där T spelar rollen av periodlängd.

För $n = 0$ får man $a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 1 \cdot e^{j0t} dt = \frac{1}{2}$.

Funktionen



och beloppet av dess fourierkoefficienter



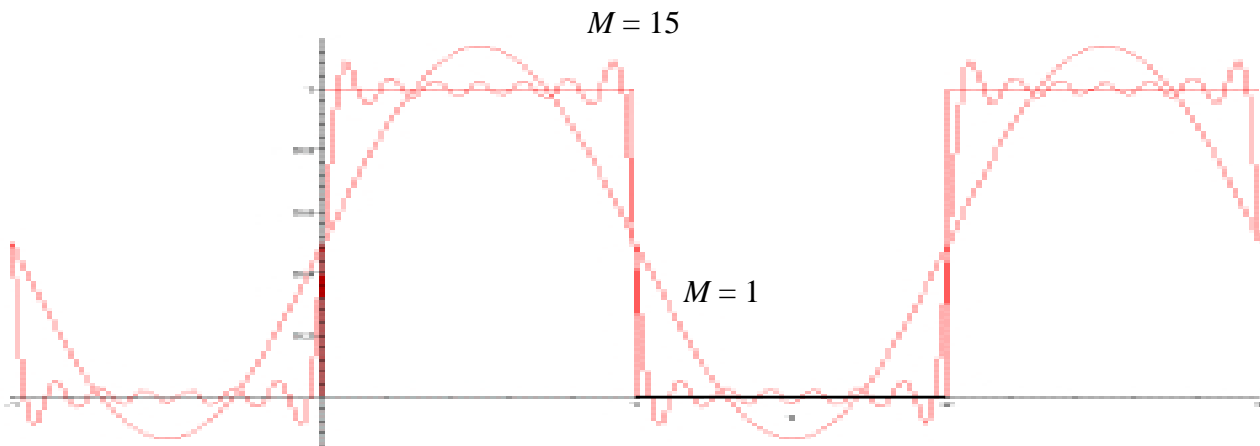
Syntesekvationen får utseendet

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{j} \dots - \frac{1}{7} e^{-7jt} - \frac{1}{5} e^{-5jt} - \frac{1}{3} e^{-3jt} - e^{-jt} + e^{jt} + \frac{1}{3} e^{3jt} + \frac{1}{5} e^{5jt} + \dots$$

Antalet termer i serien är oändligt och likheten är i första hand en likhet i generaliserad mening men man kan förvänta sig att ändliga avsnitt av serien, som

$$y_M(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{j} \sum_{\substack{n=-M \\ n \text{ udda}}}^M \frac{1}{n} e^{jnt}$$

med ökande M ger bättre och bättre approximationer till $y(t)$. Så är också fallet med undantag för t -värden nära diskontinuitetspunkter som $t = 1$.



$y(t)$ och dess 2-periodiska fortsättning, approximationerna y_1 och y_{15} .

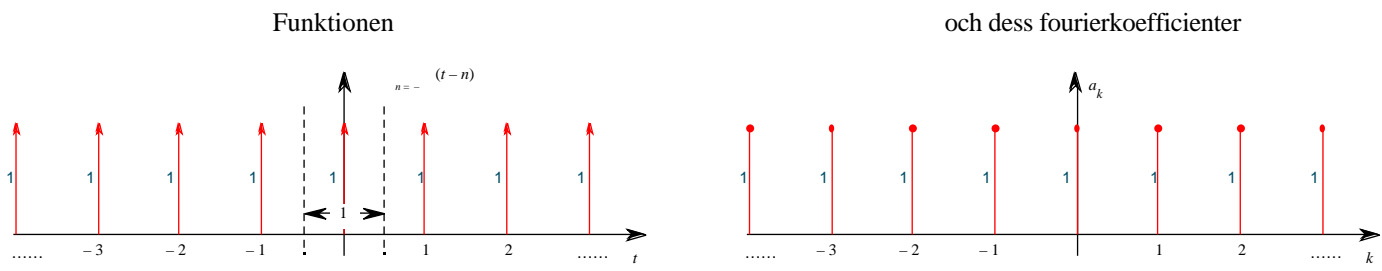
Exempel 5.2: För $x(t) = (t - 1/2)$, $-1/2 < t < 1/2$ får man fourierkoefficienterna

$$a_n = \int_{-1/2}^{1/2} (t - 1/2) e^{-jn(t-1/2)} dt = 1.$$

Den 1-periodiska fortsättningen av $(t - 1/2)$ är pulståget $(t - n)$, varför syntesekvationen ger

$$(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2jnt},$$

d.v.s. vi återfår sambandet (4.2) ovan.



(Snarlika exempel finns i OW sid 192 –195, se särskilt exempel 3.5.)

Övning 1:

- 5.1a. Bestäm fourierkoefficienterna till de 1-periodiska funktionerna $\sin 2t$ och $\cos 2t$.
- b. Bestäm fourierkoefficienterna till den P -periodiska fortsättningen till $P(t)$. Vilken blir syntesekvationen i detta fall?

Om $x(t)$ redan är en P -periodisk funktion, så är $x(t)$ identisk med den P -periodiska fortsättningen av funktionen $y(t) = x(t), 0 < t < P$. Syntesekvationen ger därför att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn t / P}, \text{ då } -\infty < t < \infty.$$

Eftersom integralen $\int_c^{c+P} x(t) dt$ är oberoende av c om $x(t)$ är P -periodisk,⁶ så spelar det ingen roll

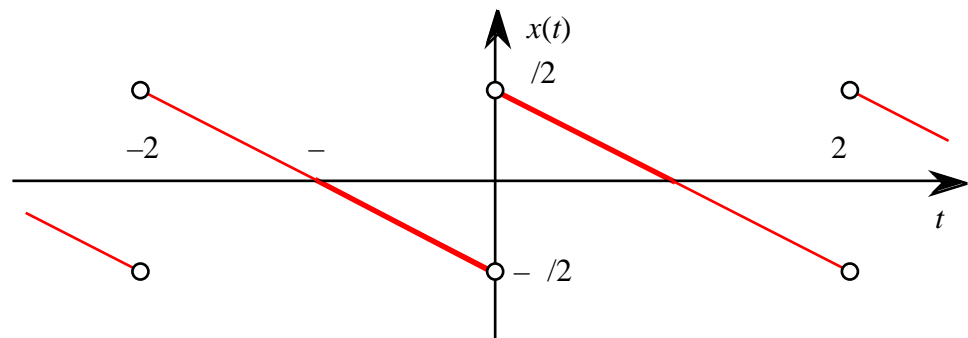
vilket intervall av längd P man integrerar över. OW använder beteckningen \int_P för sådana integrationer. Analysekvationen kan då skrivas:

$$a_n = \frac{1}{P} \int_P x(t) e^{-jn t / P} dt. \tag{4.9'}$$

Exempel 5.3

Problem: Beräkna fourierseriekoefficienterna till den 2-periodiska funktion $x(t)$ som är $(-t)/2$, då $0 < t < 2$ och $-(t+2)/2$ då $-2 < t < 0$, och skriv upp motsvarande syntesekvation.

Lösning: Grafen för denna funktion består av räta-linjestycken:



och vi ser att det är enklare att beskriva $x(t)$ som den 2-periodiska fortsättningen av den funktion som i intervallet $0 < t < 2$ antar värdena $(-t)/2$

⁶ Kan visas formellt genom att man deriverar integralen med avseende på c och utnyttjar att $x(c + P) = x(t)$. Genomför gärna detta!

Väljer man nu i (4.9') integrationsintervallet $0 < t < 2$, så får man

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-jn} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 -t e^{-jn} dt$$

Med hjälp av partiell integration och med tanke på att $e^{\pm 2jn} = 1$:

$$\frac{1}{4} \int_0^2 -t e^{-jn} dt = \frac{1}{4} \left[-\frac{t}{jn} e^{-jn} + \frac{1}{j^2} e^{-jn} \right]_0^2 = \frac{2}{4jn} + \frac{1}{4} \frac{1}{(jn)^2} e^{-jn} - \frac{1}{4} \frac{1}{(jn)^2} = \frac{2}{4jn} + 0 = \frac{1}{2jn}$$

Detta om $n \neq 0$. Om n istället är $= 0$ så får man integralen

$$\frac{1}{2} \int_0^2 -t dt = \frac{1}{4} \left[-t^2 \right]_0^2 = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1 \neq 0.$$

Syntesekvationen får formen:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2jn} e^{jnt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2jn} (e^{jnt} - e^{-jnt}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt \quad (7)$$

5.2 Fourierserier på reell form (ZC 11.2)

Om $x(t)$ är en P -periodisk reell signal, så följer efter konjugering⁸ av syntesekvationen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2jnt/P}$$

att $x(t) = x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^* e^{-2jnt/P} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}^* e^{2jnt/P}$

Eftersom fourierkoefficienterna är unika, så måste detta innebära att $a_n = a_{-n}^*$. Detta medför att om vi parar ihop den n :te termen i syntesekvationen med den $(-n)$:te ($n \neq 0$), så kan vi skriva om dem:

$$a_n e^{2jnt/P} + a_{-n} e^{-2jnt/P} = a_n e^{2jnt/P} + (a_n e^{2jnt/P})^* = 2 \operatorname{Re} (a_n e^{2jnt/P}) = 2 \operatorname{Re} (a_n (\cos(2nt/P) + j \sin(2nt/P))) = u_n \cos(2nt/P) + v_n \sin(2nt/P),$$

där

$$u_n = 2 \operatorname{Re} a_n \quad \text{och} \quad v_n = -2 \operatorname{Im} a_n.$$

Eftersom fourierkoefficienterna kan skrivas

$$a_n = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) e^{-2jnt/P} dt = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) \cos(2nt/P) dt - j \frac{1}{P} \int_0^P x(t) \sin(2nt/P) dt,$$

Här avläser man, för reella $x(t)$, a_n -koefficienternas real- och imaginärdelar, vilket ger

$$u_n = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \cos(2nt/P) dt \quad \text{och} \quad v_n = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \sin(2nt/P) dt.$$

Kalkylen ovan omfattade inte fallet $k = 0$, men för detta n -värde har man

⁷ Jämför med resultatet i exempel 4.1.

⁸ Konjugatet till ett komplext tal $a + jb$ (a och b reella) är som bekant talet $a - jb$. Konjugatet till z betecknas i kurslitteraturen med z^* .

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) dt,$$

som är ett reellt tal. Sammanfattningsvis kan man alltså skriva syntesekvationen på formen

$$x(t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \cos(2n\pi t/P) + v_n \sin(2n\pi t/P)),$$

där (de reella) fourierkoefficienterna ges av

$$u_n = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \cos(2n\pi t/P) dt, \quad n \geq 1 \quad \text{och} \quad v_n = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \sin(2n\pi t/P) dt, \quad n \geq 1.$$

Anmärkning 2: Detta är den historiskt sett ursprungliga formulering av Fouriers sats. Zill-Cullen kap 11.2 – 3, arbetar utslutande med denna. Det som här betecknats u_n och v_n kallas i ZC a_k och b_k .

Vi har satt $u_0 = 2a_0$ bara för att slippa särbehandla fallet $n = 0$ i fourierkoefficientformeln.

Exempel 5.4: Den 2-periodiska funktionen $y(t)$ i exempel 5.1 har de komplexa fourierkoefficienterna

$$a_n = 0, \text{ om } n \text{ jämnt } \neq 0 \text{ och } = -\frac{j}{n}, \text{ om } n \text{ udda samt } a_0 = \frac{1}{2}.$$

De reella fourierkoefficienterna är därför

$$u_n = 0, \text{ om } n \neq 0 \text{ och } u_0 = 1, \\ v_n = 0, \text{ om } n \text{ jämnt } \neq 0 \text{ och } = \frac{2}{n}, \text{ om } n \text{ udda}$$

och man får den reella syntesekvationen

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} \sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots$$

Anmärkning 3: Observera den inte så självklara summationsformel som man får om man t.ex. sätter $t = 1/2$ i det sistnämnda sambandet. Eftersom $x(1/2) = 1$ och $\sin(2n+1)\pi/2 = \sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$, så

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, \text{ d.v.s. } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{4}.$$

Övning 5.2: Bestäm den komplexa och den reella fourierserien för den 2-periodiska funktion som är $= 1$ i intervallet $-\pi/2 < t < \pi/2$ och $= 0$ då $\pi/2 < t < 3\pi/2$.

5.3 Egenskaper hos fourierserietransformen

Mellan en periodisk funktion och dess fourierkoefficienter finns många rätt enkla samband. Några exempel:

Om den P -periodiska signalerna $x(t)$ och $y(t)$ har fourierseriekoefficienterna a_n resp. b_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, så gäller att

funktionen	har fourierseriekoefficienterna
$A x(t) + B y(t), A$ och B konstanta	$A a_n + B b_n$
$x'(t)$	$\frac{2}{P} j n a_n$
$x''(t)$	$-\frac{4}{P^2} n^2 a_n$
$x^{(m)}(t)$	$\frac{2}{P} j^m n^m a_n$
$x(t-c)$	$e^{-2 j n c / P} \cdot a_n$
$x(t-nP)$ $n = -$	$a_n = \frac{1}{P}$

Notera att sambanden som rör derivering och translation blir speciellt enkla för 2-periodiska funktioner.

Ytterligare några egenskaper finns listade i OW sid 206 och i övre halvan av "Table 4.2" på sid 329.. Förutom att de har stort principellt intresse kan de ofta användas för att förenkla räknarbete.

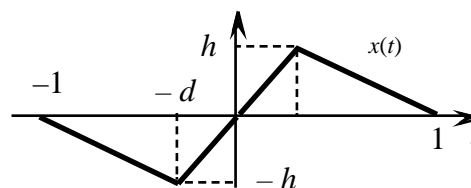
Tabell över den reella varianten av fourierserierna finns också i handboken .

Exempel 5.5:

Problem: Bestäm fourierutvecklingen till den 2-periodiska funktion som i intervallet $0 \leq t < 1$ ges av

$$x(t) = \begin{cases} ht/d, & \text{då } 0 \leq t < d, \\ h(1-t)/(1-d), & \text{då } d \leq t < 1 \end{cases}$$

och för vilken $x(-t) = -x(t)$.



Lösning: Syntesekvationen har utseendet $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jnt}$, där fourierkoefficienterna kan beräknas direkt ur analysekvationen. Enklare blir det dock om man observerar att x' och framför allt x'' är betydligt enklare funktioner än x :

$$x'(t) = \begin{cases} h/d, & \text{då } 0 < t < d, \\ -h/(1-d), & \text{då } d < t < 1. \end{cases} \quad (\text{Rita grafen!})$$

och
$$x''(t) = \frac{h}{d} \delta(t-d) - \frac{h}{1-d} \delta(t-d) = \frac{h}{d(1-d)} (\delta(t+d) - \delta(t-d)). \quad (\dagger)$$

Deriverar man syntesekvationen 2 ggr får man att $x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn)^2 a_n e^{jnt}$. Här avläser man att x'' 's fourierkoefficienter $(jn)^2 a_n = -2n^2 a_n$ erhålls ur

$$\begin{aligned} -2n^2 a_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x''(t) e^{-jnt} dt = \frac{h}{2d(1-d)} \int_{-1}^1 (\delta(t+d) - \delta(t-d)) e^{-jnt} dt = \\ &= \frac{h}{2d(1-d)} (e^{jnd} - e^{-jnd}) = \frac{jh}{d(1-d)} \sin(nd), \text{ varav för } n \neq 0: \end{aligned}$$

$$a_n = -\frac{jh}{2n^2d(1-d)} \sin(nd),$$

Återstår att beräkna a_0 som enligt analyskvationen är $\frac{1}{2} \int_0^1 x(t) dt$, d.v.s. funktionens medelvärde

över en period. Detta medelvärde är i det här fallet uppenbarligen $= 0$.

Vi får alltså fourierserien

$$x(t) = -\frac{jh}{2d(1-d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nd)}{n^2} e^{jnt}.$$

Anmärkning: Alternativt kan man få fram resultatet utgående från uttrycket för andraderivatan (\dagger) och egenskapstabellen ovan: De 2-periodiska fortsättningarna av respektive funktioner nedan har enligt tabellen de angivna koefficienterna:

- $(t) \quad \frac{1}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
- $(t \pm d) \quad e^{\pm njd} \cdot \frac{1}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
- $x''(t) \quad \frac{h}{d(1-d)} (e^{-njd} - e^{+njd}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{hj}{d(1-d)} \sin nd, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
- För $n \neq 0$: $x(t) \quad a_n = -\frac{1}{2n^2} \cdot \frac{hj}{d(1-d)} \sin nd$
- För $n = 0$ får vi som nyss direkt ur analyskvationen att $a_0 = 0$.

Detta ger svaret ovan.

För ytterligare exempel se OW s. 206 – 209.

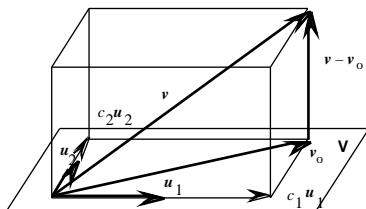
Övning

5.3 Bestäm fourierkoefficienterna till funktionen i exempel 5.3 med hjälp av någon av beräkningsmetoderna som användes i exempel 5.5.

5.4 Samband mellan fourierserier och minstakvadratapproximation.

(Se också ZC kap 11.1)

Partiellsummor till en funktions fourierserie ger ofta kusligt bra approximationer till funktionen (jmf exempel 5.1 ovan). Detta kan i på sätt och vis förklaras av att fourierutvecklingen i viss mening är optimal. Informellt kan man förstå hur detta hänger ihop via en geometrisk analogi, som för övrigt också ligger till grund för det generella approximationsförfarande som går under namnet ”minstakvadratmetoden”.



Anta att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ och \mathbf{v} är tre vektorer i rummet sådana att \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 spänner upp ett plan \mathbf{V} . Om \mathbf{v} ligger i detta plan, så kan \mathbf{v} skrivas som en linjär kombination av \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \quad (4.10)$$

Vektorerna \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 kan ses som en bas för ett koordinatsystem i planet \mathbf{V} och koefficienterna c_1 och c_2 som koordinaterna för vektorn \mathbf{v} i den basen. Dessa är särskilt lätta att beräkna om vektorerna \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 är vinkelräta mot varandra, dvs då den skalära produkten $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$. Man har nämligen då att

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = c_1 |\mathbf{u}_1|^2,$$

varav
$$c_1 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}) / |\mathbf{u}_1|^2 \text{ och på samma sätt } c_2 = (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}) / |\mathbf{u}_2|^2 \quad (4.11)$$

Om \mathbf{v} inte ligger i planet \mathbf{V} så finns ingen möjlighet att uttrycka \mathbf{v} med hjälp av \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 som i (4.10). Däremot finns det i planet \mathbf{V} en vektor \mathbf{v}_0 som ligger närmast \mathbf{v} , nämligen den för vilken $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ är vinkelrät mot planet, och alltså också mot \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 . Detta innebär att om $\mathbf{v}_0 = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$, så måste

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{u}_k = (\mathbf{v} - c_1\mathbf{u}_1 - c_2\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_k = 0, k = 1, 2.$$

Detta ger igen sambanden (4.10) och man kan sammanfatta:

Den vektor i planet som ligger närmast \mathbf{v} ges av

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}_1|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}_2|^2} \mathbf{u}_2$$

och "felet" man gör då man approximerar $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ ges av $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|$. Enligt Pythagoras' sats (se fig) blir detta:

$$|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2 = |\mathbf{v}|^2 - |c_1\mathbf{u}_1|^2 - |c_2\mathbf{u}_2|^2 = |\mathbf{v}|^2 - |c_1|^2|\mathbf{u}_1|^2 - |c_2|^2|\mathbf{u}_2|^2.$$

Man ser också att

$$|\mathbf{v}|^2 = |c_1|^2|\mathbf{u}_1|^2 + |c_2|^2|\mathbf{u}_2|^2. \quad (4.12)$$

Om speciellt \mathbf{v} ligger i planet \mathbf{V} , så kommer $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ och felet vara $= 0$, d.v.s likhet gäller

$$|\mathbf{v}|^2 = |c_1|^2|\mathbf{u}_1|^2 + |c_2|^2|\mathbf{u}_2|^2 \quad (4.13)$$

Förfarandet kan utan vidare generaliseras till vektorer i \mathbf{R}^n och till flera "basvektorer" \mathbf{u}_k än två och även till vektorer i \mathbf{C}^n med komplexa koordinater om man definierar skalärprodukt av två sådana vektorer med koordinater

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ och } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

enligt

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k^*.$$

Normen (längden), $|\mathbf{x}|$, av en vektor definieras då av

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n |x_k|^2.$$

Anmärkningsvärt nog kan allt detta generaliseras till att handla om funktioner i stället för vektorer! Detta om man definierar "skalärprodukt mellan två funktioner" $x(t)$ och $y(t)$ som

$$(x(t), y(t)) = \int_b^c x(t) y^*(t) dt, \text{ där } b < t < c \text{ är ett passande intervall}^9 \quad (4.14)$$

och i analogi därmed "normen av $x(t)$ ", $|\mathbf{x}(t)|$, enligt

$$|\mathbf{x}(t)|^2 = (x(t), x(t)) = \int_b^c |x(t)|^2 dt. \quad (4.15)$$

Man får en koppling mellan detta och fourierserierutveckling av P -periodiska funktioner om man definierar skalärprodukten och norm som i (4.14) och (4.16) med ett integrationsintervall av längd P :

$$(x(t), y(t)) = \int_P x(t) y^*(t) dt \text{ och } |\mathbf{x}(t)|^2 = \int_P |x(t)|^2 dt. \quad (4.16)$$

Signalerna $x(t)$ och $y(t)$ kan tas godtyckliga så när som på att deras normer enligt (4.15) är ändliga, d.v.s att $\int |x(t)|^2$ och $\int |y(t)|^2$ är integrabla och integralen ifråga är konvergent. Man brukar säga att sådana signaler har en "ändlig energi". Mer om detta längre fram.

⁹ Beteckningen $(x(t), y(t))$ för skalärprodukten av två funktioner är rätt vedertagen. Observera att beteckningen $x(t) \cdot y(t)$ inte är lämplig eftersom den ju allmänt används när man multiplicerar två funktioner "som vanligt".

Syntesekvationen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2 j n t / P} \quad (4.17)$$

kan då uppfattas som att "vektorn" $x(t)$ är en linjär kombination av (de oändligt många) "vektorer" $v_n(t)$

$$v_n(t) = e^{2 j n t / P}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

där $a_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, är motsvarande koefficienter. Syntesekvationen uttrycker att alla funktioner exakt kan skrivas som en sådan linjär kombination av "basfunktionerna" $v_n(t)$. Eller annorlunda uttryckt: "Vektorn" $x(t)$ ligger i det "rum" som "vektorer" $e^{2 j n t / P}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, spänner upp.

För dessa basfunktioner gäller nu att deras parvisa skalära produkter är = 0:

$$\begin{aligned} (v_m(t), v_n(t)) &= \int_0^P e^{2 j m t / P} \cdot e^{-2 j n t / P} dt = \int_0^P e^{2 j(m-n)t / P} dt = \int_0^P e^{2 j k t / P} dt = 0 \quad \text{Om } m \neq n \\ &= \frac{e^{2 j(m-n)t / P}}{2 j(m-n)} \Big|_0^P = \frac{e^{2 j(m-n)P} - 1}{2 j(m-n)} = 0, \text{ eftersom } e^{2 j k} = 1 \text{ för varje heltal } k. \end{aligned}$$

Basfunktionerna är alltså parvis vinkelräta.

För normerna gäller

$$|v_n(t)|^2 = \int_0^P e^{2 j n t / P} \cdot e^{-2 j n t / P} dt = \int_0^P dt = P,$$

d.v.s. basfunktionernas normer är alla $= \sqrt{P}$.

Detta betyder att koefficienterna a_n i syntesekvationen bör kunna beräknas enligt principen (4.11) ovan

$$a_n = \frac{(x(t), v_n(t))}{|v_n(t)|^2} = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) \cdot e^{-2 j n t / P} dt \quad (4.18)$$

vilket inte är något annat än just analysekvationen.

Vidare: Partialsummorna till fourierserien,

$$\text{dvs.} \quad x_M(t) = \sum_{n=-M}^M a_n e^{2 j n t / P},$$

kan uppfattas som den bästa approximation till $x(t)$ som man kan få genom att linjärkombinera de $2M + 1$ funktionerna $e^{2 j n t / P}, n = 0, \pm 1, \dots, \pm M$, på samma sätt som v_0 approximerar v i den geometriska betraktelsen ovan. Felet vid approximationen mäts då med normen

$$|x(t) - x_M(t)|^2.$$

Tänker man på $x(t)$ som en signal, så är normkvadraten ett mått på energin/period i signalen.¹⁰ För signalen x_M kommer alltså bortfallet, i förhållande till signalen $x(t)$, energimässigt att vara så litet som möjligt. Sambandet (4.15) ovan ("Pythagoras' sats") kommer i fourierseriesammanhang att få utseendet

$$\int_0^P |x(t)|^2 dt = \int_0^P |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \int_0^P |v_n(t)|^2 dt = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2. \quad (4.19)$$

Likheten kallas i dessa sammanhang *Parsevals relation*. En energimässig tolkning av den är att:

¹⁰ Obs att om $x(t)$ exempelvis är en elektrisk signal där x är strömstyrkan, så kommer x^2 att vara proportionell mot effekten och tidsintegralen mot något med dimension effekt \times tid, dvs energi.

Energin/period hos en signal = summan av delsvängningarnas energier/period.

Exempel 5.6:

Om en signal skickas igenom ett så kallat (*idealt*) *högpasfilter*, så släpps alla harmoniska frekvenser från och med en viss nivå (brytfrekvensen B) igenom utan att påverka vare sig amplitud eller fas, medan inga harmoniska frekvenser under denna nivå tillåts passera.

Problem: Signalen i exempel 5.1 där t mäts i millisekunder (ms) skickas igenom ett högpasfilter med $B = 1$ kHz. Hur stor andel av signalens energi har då den filtrerade signalen?

Lösning: Om $y(t)$ är ursprungssignalen och $\hat{y}(t)$ är den filtrerade, så är den efterfrågade energiandelen

$$\frac{|\hat{y}(t)|^2}{|y(t)|^2}$$

Den harmoniska signalen e^{jnt} har frekvensen $n/2$ kHz. I vårt speciella fall filtreras alla med $n/2 < 1$, d.v.s. $n < 2$ bort (obs att grundfrekvensen $P = 2$ kHz eftersom t mäts i ms). Den bortfiltrerade delen av signalen är därmed

$$y(t) - \hat{y}(t) = y_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{j} \sum_{n=-1}^1 \frac{1}{n} e^{jnt} = -\frac{1}{j} e^{-jt} + \frac{1}{2} + \frac{1}{j} e^{jt}$$

och den filtrerade

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{j} \sum_{\substack{n=-3 \\ n \text{ udda}}}^3 \frac{1}{n} e^{jnt}$$

Parsevals relation utsäger att

$$|\hat{y}(t)|^2 = 2 \cdot \sum_{\substack{n=-3 \\ n \text{ udda}}}^3 \frac{1}{n^2} = |y(t)|^2 - \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{j} \sum_{n=-1}^1 \frac{1}{n} e^{jnt} \right|^2 = |y(t)|^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

Men

$$|y(t)|^2 = \int_0^1 |y(t)|^2 dt = \int_0^1 1^2 dt = 1,$$

varav vi får den sökta energiandelen:

$$\frac{|\hat{y}(t)|^2}{|y(t)|^2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = 9,5\%.$$

Den matematiska substansen i Parsevals relation är betydande, vilket något litet framgår av nästa exempel.

Exempel 5.7:

Enligt exempel 5.1 har vi för den 2-periodiska funktionen $y(t) = 1$, då $0 < t < 1$, $= 0$, om $1 < t < 2$, att

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{j} \dots - \frac{1}{7} e^{-7jt} - \frac{1}{5} e^{-5jt} - \frac{1}{3} e^{-3jt} - e^{-jt} + e^{jt} + \frac{1}{3} e^{3jt} + \frac{1}{5} e^{5jt} + \dots$$

Parsevals relation ger då att

$$|y(t)|^2 = 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{1}{|jn|^2} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{1}{(n)^2},$$

där som i föregående exempel

$$|y(t)|^2 = \int_0^1 |y(t)|^2 dt = \int_0^1 1 dt = 1,$$

varav
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}} \frac{1}{n^2}, \text{ d.v.s. } 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{2}{8},$$

ett resultat som inte är så lätt att få fram utan hjälp av fourierserieteorin.

5.5 Andra ortogonala funktionsserier

Det är orthogonaliteten hos de harmoniska funktionerna $e^{jnt/P}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, som huvudsakligen är ansvarig för giltigheten av formelparet (4.17) och (4.18). Motsvarande relationer har man också för andra "basfunktioner" med parvis ortogonala funktioner.

Exempel 5.8:

Problem:

- a.** Bestäm konstanten c så att funktionerna $p_0(t) = 1$ och $p_1(t) = t + c$, $0 \leq t \leq 1$, är ortogonala med avseende på den skalära produkten

$$(x(t), y(t)) = \int_0^1 x(t) y^*(t) dt.$$

Bestäm sedan motsvarande normer $\|p_0(t)\|$ och $\|p_1(t)\|$ (enligt (4.16)).

- b.** Låt $x(t)$ vara någon funktion definierad på intervallet $0 \leq t \leq 1$. Ange formler för hur konstanterna a_0 och a_1 skall beräknas för att funktionen

$$\hat{x}(t) = a_0 p_0(t) + a_1 p_1(t)$$

approximerar funktionen $x(t)$ så, att "energidifferensen" $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$ är så liten som möjligt.

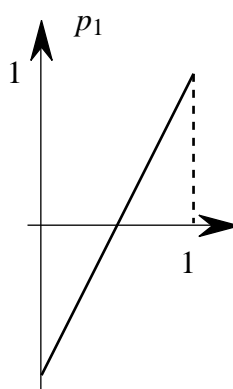
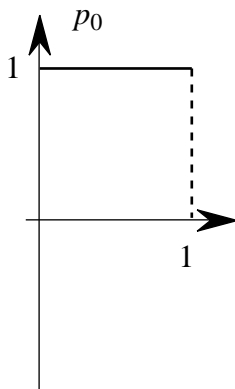
- c.** Bestäm det polynom av grad 1 som i energidifferensmening approximerar $x(t) = t^3$ på bästa sätt.

Lösning:

a. $(p_0(t), p_1(t)) = 0 \Rightarrow \int_0^1 1 \cdot (t + c) dt = \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2},$

$$\|p_0(t)\|^2 = \int_0^1 1^2 dt = 1 \Rightarrow \|p_0(t)\| = 1,$$

$$\|p_1(t)\|^2 = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt = \frac{(t - 1/2)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \Rightarrow \|p_1(t)\| = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$



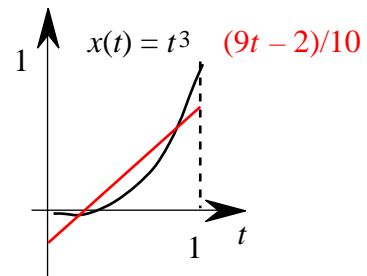
$$\mathbf{b.} \quad a_0 = \frac{(x(t), p_0(t))}{\|p_0(t)\|^2} = \frac{1}{1} \int_0^1 x(t) \cdot 1 \, dt = \int_0^1 x(t) \cdot dt,$$

$$a_1 = \frac{(x(t), p_1(t))}{\|p_1(t)\|^2} = \frac{1}{1/12} \int_0^1 x(t) \cdot (t - 1/2) \, dt = 12 \int_0^1 x(t) \cdot (t - 1/2) \, dt,$$

c. Eftersom varje polynom av grad ≤ 1 kan skrivas på formen $a_0 p_0(t) + a_1 p_1(t)$ bestämmer vi först koefficienterna a_0 och a_1 för det "bästa" polynomet. Enligt **b.**

$$a_0 = \int_0^1 t^3 \cdot dt = \frac{1}{4}, \quad a_1 = 12 \int_0^1 t^3 (t - 1/2) \cdot dt =$$

$$= 12 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) = \frac{9}{10}.$$



Den bästa förstgradsapproximationen till t^3 är alltså

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{4} + \frac{9}{10} t - \frac{1}{2} = \frac{9}{10} t - \frac{1}{5}$$

Övningar:

5.4 a. Förenkla koefficienterna i fourierserien för signalen i exempel 5.5 för det fall att $d = 1/2$ och $h = 1/2$.

b. Ett (idealt) lågpasfilter släpper igenom alla harmoniska signaler upp till en viss frekvens B oögraderade och ingen av de harmoniska signalerna med högre frekvens. Man vill konstruera ett lågpasfilter så att andelen förlorad energi vid filtrering av signalen i a-uppgiften blir mindre än 1%. Hur skall brytfrekvensen B då väljas? Variabeln t mäts i ms.

Du kan börja med att verifiera att om B [kHz] väljs i intervallet $M + 1/2 < B < M + 3/2$ (M heltal ≥ 0), så kommer andelen förlorad energi att vara

$$1 - \frac{96}{4} \sum_{m=0}^M \frac{1}{(2m+1)^4}.$$

5.5 a. Bestäm konstanterna b och c så att $p_2(t) = t^2 + bt + c$, $0 \leq t \leq 1$, är ortogonal mot polynomen $p_0(t)$ och $p_1(t)$ i exempel 5.8.

b. Bestäm det polynom $\hat{x}_2(t)$ av grad ≤ 2 som approximerar funktionen $x(t) = t^3$, $0 \leq t \leq 1$, så att energiavvikelsen $\|\hat{x}_2(t) - x(t)\|^2$ är så liten som möjligt.

Du kan lämpligen skriva det sökta polynomet på formen $a_0 p_0(t) + a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t)$ och först bestämma a_2 . (Obs att konstanterna a_0 och a_1 redan beräknades i exemplet.)

5.6 Låt $q_0(t) = 1$ och $q_1(t) = \text{sgn } t$, $-1 \leq t \leq 1$.

a. Verifiera att dessa funktioner är ortogonala mot varandra med avseende på skalärprodukten

$$(x(t), y(t)) = \int_{-1}^1 x(t) y^*(t) \, dt$$

och bestäm funktionernas normer. (Rita graferna!)

b. Verifiera att varje funktion $y(t)$ som är konstant på intervallen $0 < t < 1$ och $-1 < t < 0$ (med eventuellt olika konstanter i de båda intervallen) kan skrivas på formen

$$y(t) = a_0 q_0(t) + a_1 q_1(t), \quad a_0 \text{ och } a_1 \text{ konstanter.}$$

c. Använd resultaten från a- och b-uppgifterna för att bestämma den i ovannämnda intervall konstanta funktion som approximerar $x(t) = t^2 - t$, $-1 \leq t \leq 1$ med minsta möjliga energiavvikelse.

5.6 Konvergensfrågor

Eftersom likheten i syntesekvationen är en likhet mellan generaliserade funktioner är det inte självklart att likheten gäller i klassisk mening, d.v.s. att

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M a_n e^{jnt},$$

där limesbegreppet är som i den ”vanliga” analysen. Detta problem är inte alldeles enkelt att reda ut, men tillräckliga villkor finns uppskrivna i kurslitteraturen: Condition 1 – 3 i OW. s. 197 – 198. Ett något enklare villkor, som nästan alltid är uppfyllt i alla praktiskt förekommande fall ges i följande sats:¹¹

Om $x(t)$ och $x'(t)$ (¹² är styckvis kontinuerliga och har höger- och vänstergränsvärden i alla punkter så är

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M a_n e^{jnt} = \frac{x(t+) + x(t-)}{2}.$$

Konvergens råder därför i praktiken ”alltid”, med undantag för de ställen där $x(t)$ är diskontinuerlig. Där blir seriesumman i stället = värdet mitt i språngintervallet. I sådana punkter uppträder också en komplikation som kallas Gibbs fenomen (se OW sid 198 – 201.)

Förutsättningarna i konvergenssatsen ovan kan inte tas bort. Man känner exempelvis till kontinuerliga periodiska funktioner vars fourierserier inte konvergerar över huvud taget. Situationen kan kännas en smula obekvämlig! En litet djupare fundering på saken kan vara som följer:

Konvergensbegreppet används här egentligen mest för att på ett precist sätt kunna uttrycka att olika funktioner ”ligger nära varandra”:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M a_n e^{jnt} = x(t)$$

får betyda att

$$\sum_{n=-M}^M a_n e^{jnt} \text{ ”ligger godtyckligt nära” } x(t) \text{ för ”tillräckligt stora” värden på } M.$$

Om gränsvärdeslikheten inte skulle stämma i en enda speciell punkt så skulle partialsummorna enligt detta *inte* ligga nära varandra. Ur signalteoretisk synpunkt är detta dock ingen särskilt lyckat. Två signaler som är lika så när som vid en enda tidpunkt skulle knappast i praktiken kunna skiljas från varandra – man vill kunna betrakta dem som lika!

Ett bättre sätt att hantera detta är att som mått på graden av ”närhet” ta *energin* (under en period) hos

differensen mellan signalerna. Att $\sum_{n=-M}^M a_n e^{jnt}$ ”ligger godtyckligt nära” $x(t)$ för ”tillräckligt stora” värden på M , får då betyda att

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=-M}^M a_n e^{jnt} - x(t) \right\|^2 = 0, \quad (4.20)$$

där $\|\cdot\|$ definieras som i (4.16)

Viktigare för signalteorin än ovannämnda konvergenssats är man faktiskt kan bevisa att:

¹¹ Se också Zill-Cullen: sats 11.1, sid 492.

¹² Derivatans i ”klassisk” mening – ingen generaliserad funktion – avses här.

Likheten (4.20) gäller för alla P -periodiska signaler med ändlig energi/period, dvs om bara

$$\int_P |x(t)|^2 dt < \infty$$

Inga speciella krav på kontinuitet eller deriverbarhet behövs för detta! Beviset för den satsen ligger utanför den här kursens ram.

Övning

5.7 I ett tabellverk hittar man att

$$\text{om } a_n = (-1)^n \frac{1+jn}{1+n^2} \text{ så är } x(t) = 2 \coth \frac{e^t}{\sinh} , \text{ då } -\infty < t < \infty .$$

a. Bestäm de exakta värdena av $x(0)$, $x(4)$ och $x(\infty)$.

b. Bestäm med hjälp av resultatet i a-uppgiften det exakta värdet av summan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

4.1 a. $1 - \frac{2}{3}^{100}$, b. $\frac{1}{5} 1 - \frac{2}{3}^{100}$.

4.2 $\frac{1}{3}$.

4.3 $a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n + \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{n-1} + \dots + \left(1 + \frac{p}{100} \right) = a \frac{100}{p} + 1 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n - 1$.

4.7 P . (Summan av serien i uppgift 4.5 för $t=0$, d.v.s. summan av $2M + 1 = P$ st. 1:or.)

4.11 $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{2}{12}$.

4.12 $\cos(n\pi/2) (t - n\pi/2)$ respektive $\cos(n\pi) (t - n\pi) = (-1)^n (t - n\pi)$

	$n =$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	\dots
Följderna av sampelvärden:	\dots	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	\dots
respektive	\dots	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	\dots

4.13 a. $x(nT)$, b. $x(t) dt$.

4.14 $\sin t$.

4.15 $\sin(-\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5.1a För $\sin 2t$: $a_1 = 1/(2j)$, $a_{-1} = -1/(2j)$, $a_n = 0$ för övriga n .
För $\cos 2t$: $a_1 = a_{-1} = 1/2$, $a_n = 0$ för övriga n .

5.1b $a_k = 1$ för alla k . Syntesekvationen: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (t/P - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2jnt/P}$.

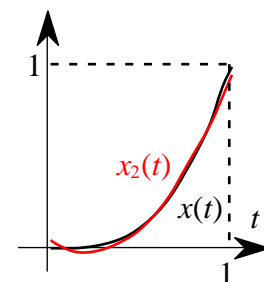
5.2. Komplex fourierserie: $\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} e^{jnt}$, reell fourierserie: $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(n\pi/2)}{n} \cos nt$.

5.4 a. $-\frac{2j}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{j(2k+1)t}$

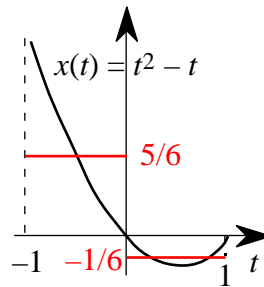
b. Om $B > 1500$ Hz så kommer andelen förlorad energi att vara $< 0.3\%$ (om $B < 1500$ Hz så kommer andelen att vara $> 1.4\%$).

5.5 a. $b = -1, c = 1/6$.

b. $\frac{3}{2} t^2 - \frac{3}{5} t + \frac{1}{20}$ (Konstanten $a_2 = 3/2$),



- 5.6 a. $|\psi_0(t)| = |\psi_1(t)| = \sqrt{2}$,
 b. Om $y(t) = c_-$ om $-1 < t < 0$ och $= c_+$ om $0 < t < 1$ så är
 $a_0 = (c_+ + c_-)/2$ och $a_1 = (c_+ - c_-)/2$.
 c. $y(t) = 5/6$ då $-1 < t < 0$ och $= -1/6$ om $0 < t < 1$.



- 5.7 a. $x(0) = \frac{1}{\sinh 4}$, $x(4) = \frac{e^{(4-2)}}{\sinh 4}$, $x(\infty) = \frac{1}{2} \frac{e^4}{\sinh 4} + \frac{e^{-4}}{\sinh 4} = \coth 4$
 b. $\coth 4 = x(\infty) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+jn}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1 + j \cdot 0$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\coth 4 - 1}{2}$.