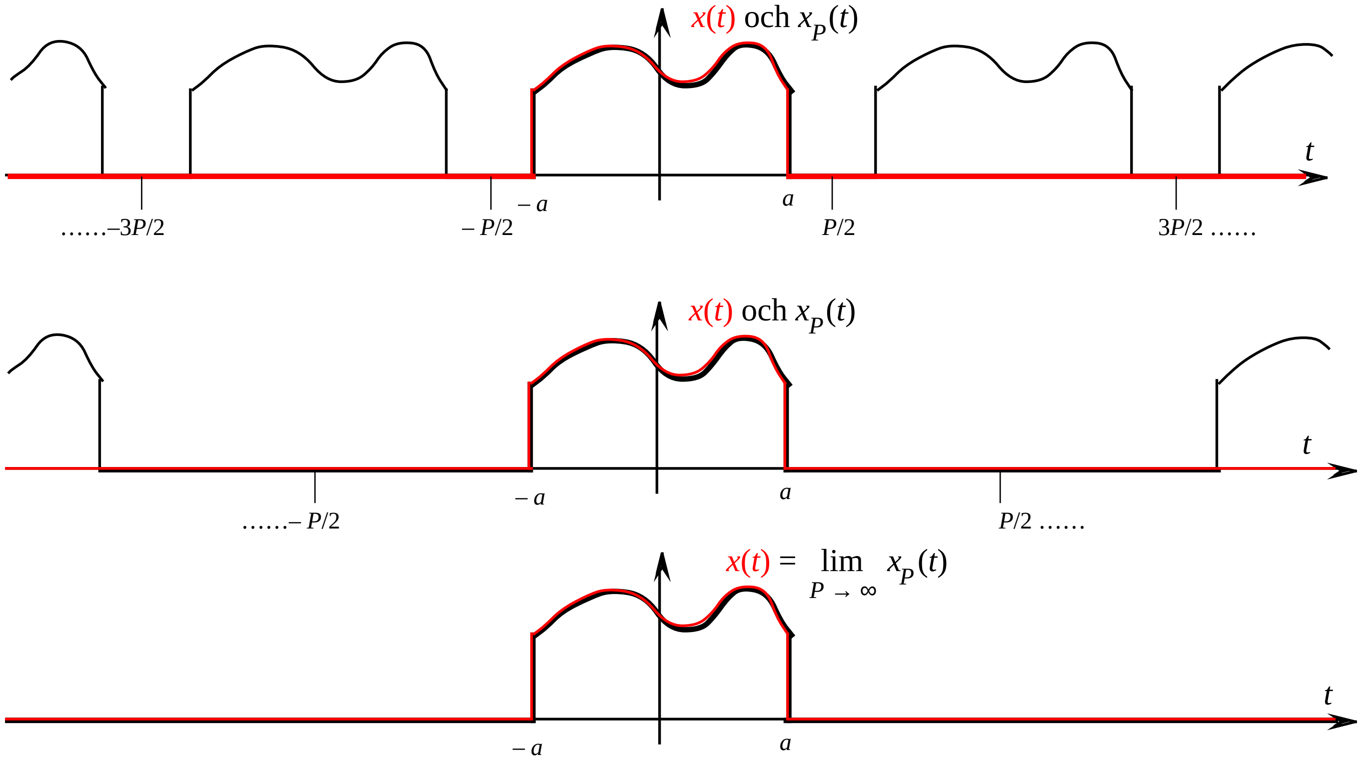
6. Tidskontinuerliga fouriertransformen

6.1. Heuristiska härledningar av den tidskontinuerliga fouriertransformen

6.1.1 Approximation av ”godtycklig” funktion med periodiska funktioner

Fourierseriers summa är alltid en periodisk funktion, och i stort sett varje periodisk funktion kan skrivas som (= representeras av) en fourierseriesumma. Det ligger nära till hands att söka efter liknande representationer för godtyckliga icke-periodiska funktioner genom att uppfatta dem som gränsfunktioner för följder av periodiska funktioner med succesivt växande periodlängd. Figurerna nedan illustrerar den idén:



Funktionen $x(t)$ är = 0 utanför intervallet $-a < t < a$, men för övrigt godtycklig. För $x_P(t)$, den P-periodiska fortsättningen av $x(t)$, gäller då att

$$\lim_{P \to \infty} x_P(t) = x(t).$$

Fourierkoefficienterna till fourierserieutvecklingen av $x_P(t)$ ges av

$$a_n = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x(\tau)\, e^{-2\pi j n\tau/P}\, d\tau = \left[\text{Om } P > 2a\right] = \frac{1}{P}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j\tau\, n/P}\, d\tau$$

och enligt syntesekvationen har man att

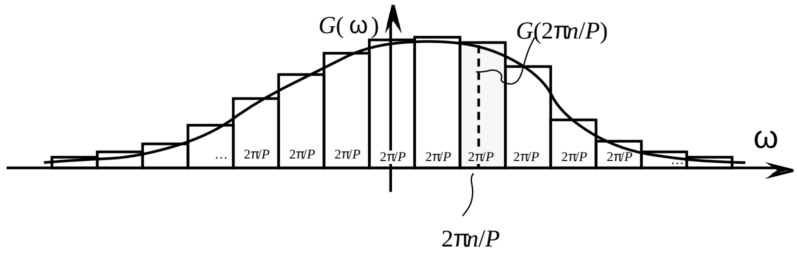
$$x_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{P}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j\tau\, n/P}\, d\tau \cdot e^{2\pi j t\, n/P} \right)$$

Om vi i uttrycket $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j\tau\, n/P}\, d\tau \cdot e^{2\pi j t n/P}$ sätter $2\pi n/P = \omega$, så förenklas det till

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \cdot e^{j\omega t} = G(\omega).$$

Man får då att
$$x_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{P}\, G\left(\frac{2\pi n}{P}\right) \tag{6.1}$$

Den summa som vi har här är nära släkt med Riemannsummorna som används vid definitionen av enkelintegral:



En heuristisk tolkning av gränsövergången $P \to \infty$ är att varje term i summan (6.1) så när som på en faktor $\frac{1}{2\pi}$ svarar mot ”arean” av en ”rektangel” med ”sidorna” $\frac{2\pi}{P}$ och $G\left(\frac{2\pi n}{P}\right)$. Den rektangelarean approximerar arean av motsvarande område mellan G:s graf och ω-axeln. Med ökande P blir rektanglarna smalare och smalare och approximationerna successivt bättre och då $P \to \infty$ kommer summan att $\to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega$.

Sätter man
$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau,} \tag{6.2}$$

så är $G(\omega) = X(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$ och man får
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.} \tag{6.3}$$

Detta par av samband är analys- respektive syntesekvationerna för den *tidskontinuerliga fouriertransformen* ($\mathcal{FT}$). Funktionen $X(j\omega)$ kallas också *fouriertransformen* av funktionen $x(t)$ eller *spektrumet* av signalen $x(t)$. I motsats till periodiska signaler som har ett *diskret* spektrum (en fourierkoefficient a_n för varje heltal n), så har icke-periodiska signaler ett *kontinuerligt* spektrum (ett värde på $X(j\omega)$ för varje reellt tal ω).

Man kan visa att sambanden (6.2) och (6.3) gäller allmänt för de generaliserade funktioner som motsvarar signaler definierade på hela tidsaxeln.[1]

[1] Resonemanget ovan motsvaras i OW av § 4.1.1.

Syntesekvationen (6.3) kan sägas uttrycka en ”godtycklig” funktion som en linjär kombination (låt vara en oändlig sådan) av harmoniska svängningar $e^{j\omega t}$. Sett på det sättet anger analysekvationen (6.2) den ”vikt”, $X(j\omega)$, som vinkelfrekvensen ω har i denna linjära kombination.

Man kan resonera sig fram till formelparet (6.2) och (6.3) på mångahanda vis. Ett mera direkt förfarande som inte går omvägen över fourierserierna skissas i nästa avsnitt. Den innehåller också en omskrivning av δ-funktionen som är intressant i sig.

6.1.2 Härledning med hjälp av δ-funktionen

δ-*funktionen som summa av harmoniska vågor*

En kontinuerlig morsvarighet till summan $\sum_{k=-M}^{M} e^{j\omega k}$ ges av integralen

$$d_{2M} = \int_{-M}^{M} e^{j\omega t}\,dt,$$

där man så att säga summerar harmoniska svängningar för *alla* frekvenser i ett visst intervall.

För summan $\sum_{k=-M}^{M} e^{j\omega k}$ härleddes i arbetsmaterial 3 att man efter gränsövergång $M \to \infty$ får likheten:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n} = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n), \tag{6.4}$$

(som är en likhet mellan generaliserade funktioner).

Litet snyggare blir den formeln om man väljer ”varvfrekvensen” $f = \omega/2\pi$ som variabel. Man får då[2]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j f n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n), \tag{6.4'}$$

Vi skall se att man har en motsvarande relation för integralfallet,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,dt = 2\pi \cdot \delta(\omega)} \tag{6.5}$$

och med varvfrekvensen som variabel

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j f t}\,dt = \delta(f).} \tag{6.5'}$$

Integralen d_{2M} kan beräknas med standardmetoder:

För $\omega \neq 0$ är

$$d_{2M} = \left[\frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\right]_{t=-M}^{M} = \frac{e^{j\omega M} - e^{-j\omega M}}{j\omega} = \left[\frac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{2j} = \sin\beta\right] = \frac{\sin M\omega}{\omega/2}$$

---

2 Obs sambandet $\delta(\omega/a) = a\,\delta(\omega)$ om $a > 0$ (sambandet (6) på sid 12 i arbetsmaterialet.)

och för $\omega = 0$ får man den konstanta integranden 1, varför värdet blir integrationsintervallets längd $2M$.

Sätter vi denna till P,[3] så får vi

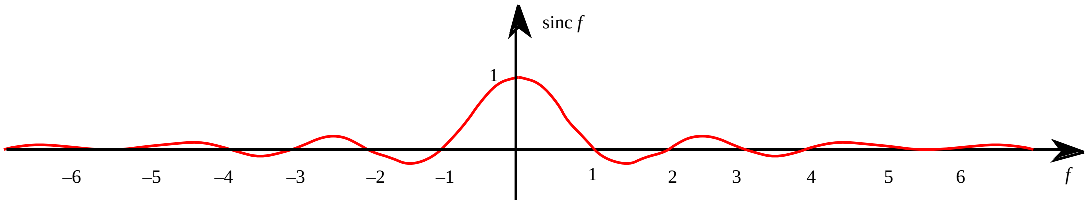
$$d_P(\omega) = \frac{\sin P\omega/2}{\omega/2}\text{, då } \omega \neq 0 \text{ och } = P, \text{ då } \omega = 0.$$

Man kan få visst grepp om hur denna funktion beror av sina två variabler P och ω genom att göra följande observationer:

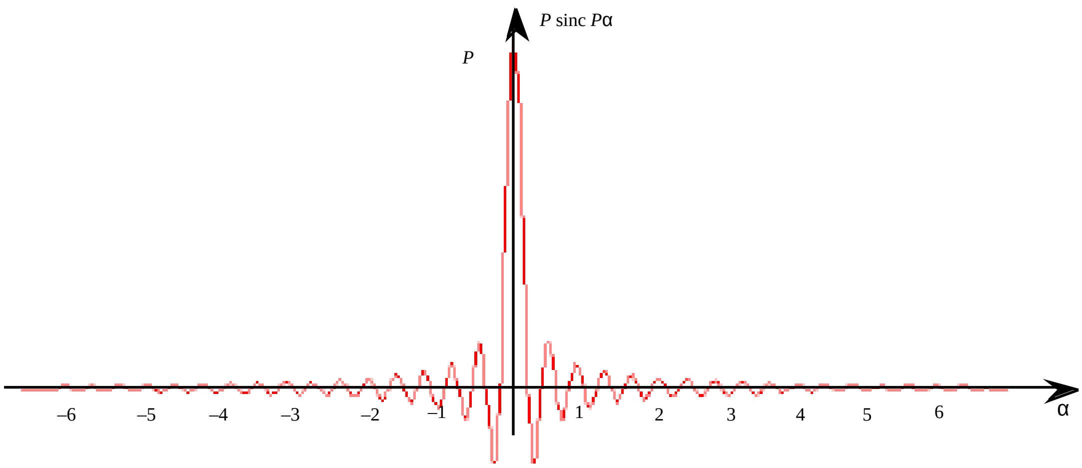
- Uttryckt i varvfrekvensen $f = \omega/2\pi$ och för $P = 1$ får vi funktionen $\frac{\sin \pi f}{\pi f}$ (då $f \neq 0$) och 1 (då $f = 0$). Den har sina nollställen i heltalspunkterna $\neq 0$ och växlar tecken i alla dessa och $\to 0$ då $f \to \infty$. Funktionen har fått ett särskilt namn – *sinus cardinalis*, förkortat sinc:

$$\operatorname{sinc} f = \frac{\sin \pi f}{\pi f}\text{, då } f \neq 0 \text{ och } = 1\text{, då } f = 0. \tag{6.6}$$

  Dess graf representerar ett slags dämpad svängning:



- För allmännare P får man, eftersom $d_P(\omega) = d_p(2\pi f) = \frac{\sin P\pi f}{\pi f} = P\frac{\sin P\pi f}{P\pi f} = P \operatorname{sinc} Pf$, att dess graf erhålls ur grafen för sinc f genom en ”areabevarande” deformation av den typ som beskrevs i avsnitt 1.8 – en hoptryckning i skalan P i horisontell led och en töjning i skalan P i vertikal led. Här kommer en skiss av grafen, där båda frekvensskalorna f och ω är markerade.



  Grafen har för stora P en markant topp i origo och svänger med dämpning. Dess nollställen ligger i punkterna $f = \pm 1/P, \pm 2/P, \pm 3/P, \ldots$ (resp. $\omega = \pm 2\pi/P, \pm 4\pi/P, \pm 6\pi/P, \ldots$), d.v.s. allt tätare med växande P.

- Den ”areabevarande” skalningen innebär att

3 Observera analogin med summafallet, där P betecknade antalet termer i summan.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_P(\omega)\,d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} d_P(2\pi f)\,df = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} f\,df.$$

Värdet av dessa integraler är alltså oberoende av P, d.v.s. en konstant.

Med metoder som går en bra bit utöver de integrationsförfaranden som beskrivs i grundkurserna kan man visa att integralen i det ledet längst till höger = 1. [4] Vidare gäller att $\int_a^b d_P(\omega)d\omega \to 0$, då $P \to \infty$ för alla intervall $a \leq \alpha \leq b$ som *inte* innehåller talet 0.

Man kan därför säga att $d_P(\omega)$ för stora P tycks approximera δ-pulsen $2\pi\cdot\delta(\omega)$. Man kan strikt visa att det faktiskt är så. Man har det *exakta* sambandet:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,dt = 2\pi\cdot\delta(\omega)} \tag{6.5}$$

eller, med $\omega = 2\pi f$ och med tanke på att $2\pi\cdot\delta(2\pi f) = \delta(f)$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j f t}\,dt = \delta(f)} \tag{6.5'}$$

Härledning av fouriertransformen

Byter man i (6.5) beteckningar: t mot ω och ω mot $t - \tau$ (t variabel, τ konstant), så får man relationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}\,d\omega = 2\pi\cdot\delta(t-\tau)$$

Mulitpliceras detta med den ”godtyckliga” funktionen $x(\tau)$ får man

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{j\omega(t-\tau)}\,d\omega = 2\pi\cdot x(t)\delta(t-\tau) = 2\pi\cdot x(\tau)\delta(t-\tau).$$

Efter integration med avseende på τ, $-\infty < \tau < \infty$, blir detta

4 De primitiva funktionerna till sinc-funktionen kan tyvärr inte uttryckas med hjälp av de elementära funktionerna, så integrationssambandet $\int_a^t x'(\tau)\,d\tau = x(t) - x(a)$ är dessvärre inte till någon nytta här!

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{j\omega(t-\tau)}\,d\omega\right)d\tau = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau).d\tau$$

Kastar man i vänster led om integrationsordningen[5] och konstaterar att $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$, får man

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau\right)d\omega = 2\pi\cdot x(t).$$

I den inre integralen kan exponentialfunktionen skrivas $e^{j\omega(t-\tau)f} = e^{j\omega t}\cdot e^{-j\omega\tau}$ där den första faktorn tydligen är oberoende av τ, varför

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right)e^{j\omega t}\,d\omega = 2\pi\cdot x(t).$$

Detta kan skrivas

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega,$$

där

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau\ ,$$

vilket är just syntes- och analysekvationerna (6.3) och (6.2) ovan.

Anmärkning: (Ett mellanspel om variabelval och beteckningar)

Också här blir formlerna litet ”snyggare” om man använder sig av variabeln $f = \frac{\omega}{2\pi}$ i stället för ω:

$$X(2\pi j f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{-2\pi j f\tau}\,d\tau \tag{6.2'}$$

och, med tanke på att $d\omega = 2\pi\,df$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(2\pi j f)\cdot e^{2\pi j f t}\,df. \tag{6.3'}$$

OW använder inte detta skrivsätt för fouriertransformen, men däremot förekommer det inte så sällan i annan litteratur. Beteckningarna för de olika transformerna är beklagligtvis inte standardiserade. I Josefssons formelsamling t ex skrivs fouriertransformen

---

5 Det är inte självklart att denna omkastning bevarar integralens värde – generellt spelar det roll i vilken ordning två på varandra följande gränsprocesser (som t.ex. integrationer) utförs, men man kan visa att omskrivningen i det här fallet är tillåten för alla ”rimliga” funktioner $x(t)$.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{-2\pi j f\tau}\, d\tau,$$

medan uppslagsverket β menar att

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau.$$

Beteckningen $X(j\omega)$ för fouriertransformen är för övrigt litet egen för OW. Författarna vill nog med sitt skrivsätt framhäva släkskapen med en annan transform, *laplacetransformen*, som dock studeras först längre fram i läroboken (och det stoffet tas först upp i kursen Signaler & system II). Den så kallade dubblelsidiga laplacetransformens definition är

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{-s\tau}\, d\tau$$

X:et i (6.2) står alltså för just denna.

Andra varianter för beteckning av fouriertransformen som också förekommer i litteraturen är

$\mathcal{F}(x)$ eller $\mathcal{FT}(x)$ här får man själv hålla reda på om ω eller f används som variabel,

$\hat{x}(\omega)$ eller $\hat{x}(f)$.

I dessa varianter framhävs via ”operatorerna” $\mathcal{F}$, $\mathcal{FT}$ respektive $\hat{}$ att fouriertransformen ”förvandlar” funktioner (”signaler”) till andra funktioner (”signalens spektrum”). Vill man ytterligare poängtera den egenskapen kan man skriva t.ex

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} X(f)$$

för analysekvationen och

$$X(f) \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} x(t)$$

för syntesekvationen.

Samma synsätt och liknande beteckningar har man ibland för fourierserierna. Analysekvationen

$$a_n = \int_{-1/P}^{1/P} x(t)\; e^{-2\pi j n t/P}\, dt\ ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

”förvandlar” signalen $x(t)$ till en talföljd a_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Om den operationen beteckna FS kan man skriva

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_n$$

och för syntesekvationen $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi j n t}$,

$$a_n \xrightarrow{\mathcal{FS}^{-1}} x(t).$$

♦

6.2 Faltning och fouriertransform

Räkneoperationerna i den senare härledningen kan uttryckas koncisare med hjälp av faltningsoperationen som nämndes i arbetsmaterial 3 (sid 25): Med *faltningen*, $x*y$, av två funktioner $y(t)$ och $z(t)$ menas funktionen

$$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau.$$

Vi observerar först några viktiga allmänna egenskaper hos faltningen:

- *Faltning är ett kommutativt räknesätt.*
  Genom att i integralen substituera $t - \tau = \sigma$ (genomför detta) och sedan byta plats på faktorerna i integranden får man

$$\boxed{x*y = y*x.} \tag{6.7}$$

Man betraktar gärna faltning som ett slags multiplikationsliknande räknesätt. Direkt ur definitionen får man följande egenskap som man känner igen från den "vanliga" multiplikationen,

- *Faltning är linjär i varje "faktor"*, den så kallade *distributiva lagen* gäller:

  För godtyckliga $x(t)$, $y_1(t)$ och $y_2(t)$ samt konstanter a_1 och a_2 gäller

$$\boxed{x*(a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2) = a_1 \cdot (x*y_1) + a_2 \cdot (x*y_2).} \tag{6.8}$$

  Båda leden kan nämligen skrivas

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, (a_1 \cdot y_1(t-\tau) + a_2 \cdot y_2(t-\tau))\, d\tau.$$

  Detta kan utan vidare utsträckas till summor med ett godtyckligt ändligt antal termer:

$$\boxed{x * \sum_{n=0}^{N} a_n\, y_n = \sum_{n=0}^{N} a_n\, (x*y_n).} \tag{6.8´}$$

  och, med lämpliga krav på konvergensförloppet[6], så gäller motsvarande också för oändliga serier

$$\boxed{x * \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, y_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, (x*y_n).} \tag{6.8´´}$$

  Om funktionen y förutom av t beror av en ytterligare parameter, nedan kallad f, så gäller i samma anda att

$$\boxed{x(t) * \int_{-\infty}^{\infty} y(t,f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)*y(t,f)\, df\,.} \tag{6.8´´´}$$

  Båda leden kan nämligen skrivas som dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{R}^2} x(\tau)\, y(t-\tau, f)\, d\tau\, df.$$

6 Preciseras inte här. För alla signalteoretiskt "rimliga" situationer är sådana krav uppfyllda.

- *Faltning är ett associativt räknesätt*
  För godtyckliga $x(t), y(t)$ och $z(t)$ gäller

$$\boxed{(x*y)*z = x*(y*z).} \tag{6.9}$$

Båda leden kan nämligen efter variabelsubstitution skrivas som dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{R}^2} x(\tau)\, y(\sigma)\, z(t-\tau-\sigma)\, d\tau\, d\sigma.$$

- δ-funktionen spelar rollen av en enhet – om man ”multiplicerar”, d.v.s faltar, med den så ”händer ingenting”:

$$(x*\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\, d\tau = x(t), \text{ eller}$$

$$\boxed{x*\delta = x.} \tag{6.10}$$

- För exponentialfunktionerna $y(t) = e^{j\omega t}$ gäller

$$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{j\omega(t-\tau)}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right)\cdot e^{j\omega t} = X(j\omega)\cdot y(t),$$

där $\quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau$

tydligen är identisk med fouriertransformen av $x(t)$,

Alltså: $$\boxed{x(t) * e^{j\omega t} = X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}.} \tag{6.11}$$

Om en exponentialfunktion faltas med en godtycklig funktion så får man tillbaka samma exponentialfunktion *multiplicerad* med en frekvensberoende faktor. Och den faktorn är just fouriertransformen till den funktion man faltat exponentialekvationen med.

Anmärkning: För linjära avbildningar i $\mathbf{R}^n$ och deras matrisrepresentanter talar man som bekant om egenvektorer och egenvärden: Vektorn $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ är egenvektor och λ är egenvärde till den linjära avbildningen (eller matrisen) $\boldsymbol{A}$ om

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

För fixerat (men godtyckligt) $x(t)$ så ordnar räkneoperationen $x*y$ en ny funktion till varje funktion y. Den tillordningen, som vi har sett är linjär, kan sägas vara analog med de ovannämnda linjära avbildningarna – den linjära avbildningen $\boldsymbol{A}$ svarar då emot funktionen x och den variabla vektorn $\boldsymbol{v}$ mot funktionen y. Övertar man terminologin från den linjära algebran, så kan man säga:

> Exponentialfunktionerna $e^{j\omega t}$ är egenfunktioner till operationen ”falta med x” och motsvarande egenvärde ges av fouriertransformen $X(j\omega)$. ♦

Syntesekvationen (6.2) erhåller man nu genom att integrera sambandet (6.11) med avseende på frekvensvariabel ω: Man får nämligen

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) * e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}\, d\omega,$$

där vänsterledet enligt (6.8´´´), (6.5) och (6.10) är identiskt med

$$x(t) * \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega = x(t) * (2\pi\cdot\delta(t)) = 2\pi\cdot x(t),$$

d.v.s.
$$2\pi\cdot x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Lämpliga exempel att titta på: OW Ex 4.1 5, sid 290ff.

Övningar: (Nedan betecknar $u(t)$ ”the unit step function”, dvs. $u(t) = 1$ om $t > 0$ och $= 0$ om $t < 0$.)

6.1 Beräkna

a. $e^{-|t|} * 1$, b. $e^{t} * u(t)$, c. $e^{-t} * u(-t)$, d. $e^{-|t|} * t$,

e. $\mathrm{rect}_1(t) * 1$, f. $\mathrm{rect}_1(t) * t$, g. $\mathrm{rect}_1(t) * t^2$,

h. $\mathrm{rect}_1(t) * u(t)$, (rita figur!), i $\mathrm{rect}_1(t) * \mathrm{rect}_1(t)$, (rita figur!)

j. $u(t) * u(t)$, (rita figur!), k. $e^{-t} * \mathrm{rect}_1(t)$, l $\{e^{t}\cdot u(t)\} * e^{2t}$,

m. $e^{-|t|} * e^{jt}$ n. $e^{-|t|} * \cos t$, o. $e^{-|t|} * \sin t$, p. $\delta(t-1) * \delta(t-1)$.

6.2 Verifiera följande allmänna relationer (a och b är en godtyckliga reella konstanter):

a. $\delta(t-a) * y(t) = y(t-a)$,

och om $x(t) * y(t) = z(t)$

b, $x(t-a) * y(t) = x(t) * y(t-a) = z(t-a)$,

c. $x(t-a) * y(t-b) = z(t-a-b)$,

d. $x(-t) * y(-t) = z(-t)$.

6.3 Funktionen $x(t)$ är sådan att $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$ är konvergent. Verifiera följande allmänna relationer.

a. $x(t) * 1 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$, b. $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$,

och för de fall då $x(t)$ dessutom är en jämn reellvärd funktion:

c. $x(t) * \cos(\omega t) = X(j\omega)\cdot\cos(\omega t)$, d. $x(t) * \sin(\omega t) = X(j\omega)\cdot\sin(\omega t)$,

(*Ledning*: Obs att $x(t)$ är jämn och reellvärd (om och) endast om $X(j\omega)$ också är (jämn och) reellvärd.)

6.4 Vilka är relationerna motsvarande dem i 6.3c och d om $x(t)$ istället är en udda, reellvärd funktion?

6.3 Egenskaper hos transformen (Se också tabell i OW sid 328-9 och Josefssons samling)

De allmänna egenskaperna hos den tidskontinuerliga transformen är av samma slag som för fourierserierna ($\mathcal{FS}$). Exempelvis är fouriertransformen också linjär:

$$ax(t) + by(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} aX(j\omega) + bY(j\omega) \qquad (a \text{ och } b \text{ konstanter})$$

Behöver man transformera (eller återtransformera) en linjär kombination av termer så räcker det alltså att man transformerar varje term för sig varefter man linjärkombinerar resultaten.

Fouriertransformens viktigaste egenskaper finns listade i OW §4.6, Table 4.1. Härledningarna är i de flesta fall rättframma (se OW §4.3). Exempelvis inses att om $x(t)$ är en $\left\{\begin{matrix}\text{jämn}\\ \text{udda}\end{matrix}\right\}$ funktion, så är också $X(j\omega)$ en $\left\{\begin{matrix}\text{jämn}\\ \text{udda}\end{matrix}\right\}$ funktion,

genom att enligt (6.2)

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau(-f)}\, d\tau = \left[\text{Byt } \tau \text{ mot } -\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \left[\text{Om } x \text{ jämn}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = X(j\omega), \text{ dvs } X \text{ är jämn.}$$

(a) Dualitet (OW4.3.6)

Sambanden (6.2) och (6.3) är anmärkningsvärt symmetriska till sin konstruktion, man säger att de är *duala*: Särskilt tydligt blir detta om vi använder varvfrekvensen f som variabel. Analyssambandet (6.3´) tillämpat på funktionen $X(2\pi j\, t)$ – alltså fouriertransformen av x med f-variabeln bytt mot t – ger att *dess* fouriertransform är

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(2\pi j\, t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(2\pi j\, t)\, e^{2\pi j(-f)t}\, dt = x(-f),$$

Om man istället byter ω-variabeln mot t så har man förstås en liknande relation, men faktorn 2π dyker då upp på annat sätt. Analyssambandet (6.3) ger:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\, t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\, t)\, e^{j(-\omega)t}\, dt = 2\pi \cdot x(-\omega)$$

Det är naturligt att upprätta tabeller över funktioner och deras transformer. Table 4.2 i OW är en sådan och i Josefssons formelsamling (den lilla skära) finns en annan. OW använder ω-variabeln och Josefsson f-variabeln.

Dualitetsegenskapen ovan kan i sådana tabell skrivas:

	Funktion	Transform, ω-var.	Transform, f-var.
Om	$x(t)$	$Z(\omega)$	$Z(f)$
så gäller	$Z(t)$	$2\pi \cdot x(-\omega)$	$x(-f)$

Exempel 6.1:

a. Man vill bestämma fouriertransformen till funktionen $x(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Direkt beräkning via analysekvationen ter sig svår eftersom integranden $\dfrac{e^{-j\omega t}}{1+t^2}$ saknar elementär primitiv funktion, så rutinmetoderna för integrallösning går inte att använda.

I en tabell över fouriertransformer (ω-varianten) hittar man dock att

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \quad (\text{om } a > 0).$$

Dualitetsprincipen ger då (välj $a = 1$ 0ch låt $\dfrac{1}{1+\omega^2}$ spela rollen av $Z(\omega)$) att

$$\frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot e^{-|-\omega|} = \pi \cdot e^{-|\omega|}.$$

b. I en tabell av f-typ hade man istället hittat att

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \quad (\text{om } a > 0).$$

Dualitetsprincipen ger då att

$$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2}. \xrightarrow{\mathcal{FT}} e^{-a|-f|} = e^{-a|f|}.$$

Speciellt om $a = 2\pi$

$$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2}. \xrightarrow{\mathcal{FT}} e^{-a|f|}.$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}. \xrightarrow{\mathcal{FT}} e^{-2\pi|f|},$$

d.v.s. den sökta transformen är $\pi \cdot e^{-2\pi|f|}$. ♦

(b) δ-funktionen ↔ Konstanten 1 (med transformvariabeln f)

Om $x(t) = \delta(t)$ så är $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = e^0 = 1$. Dualiteten (obs δ är en jämn funktion) ger omedelbart att om $x(t) = 1$ så är $X(j\,\omega) = 2\pi\,\delta(t)$. Väljer man ”varvfrekvensen” f som variabel på transformsidan, så får man den litet snyggare transformen $\delta(f)$. I tabellform:

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
1.	$\delta(t)$	1	1
2.	1	$2\pi\,\delta(\omega)$	$\delta(f)$

(c) Förskjutning ↔ Multiplikation med harmonisk svängning (OW4.3.2,)

Ett par duala allmänna egenskaper är

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
	$x(t)$	$X(j\omega)$	$X(f)$
1.	$e^{j\omega_0 t}\,x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$	
2.	$e^{2\pi j a t}\,x(t)$		$X(f-a)$
3.	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}\,X(f)$	$e^{-2\pi j t_0 f}\,X(f)$

Kombineras detta med resultatet i (b) får man

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
4.	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	$e^{-2\pi j t_0 f}$
5.	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$	
6.	$e^{2\pi j f_0 t}$		$\delta(f-f_0)$

Speciellt så gäller för de trigonometriska funktionerna

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
7.	$\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)$	$e^{-j\omega t_0}+e^{j\omega t_0}=$ $2\cos(t_0\omega)$	$e^{-2\pi jaf}+e^{2\pi jaf}=$ $2\cos(2\pi af)$
8.	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$	
9.	$\cos(2\pi f_0 t)$		$(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))/2$

och

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
10.	$\delta(t-t_0)-\delta(t+t_0)$	$e^{-j\omega t_0}-e^{j\omega t_0}=$ $2j\sin(t_0\omega)$	$e^{-2\pi jaf}-e^{2\pi jaf}=$ $2j\sin(2\pi af)$
11.	$\sin(\omega_0 t)$	$-\pi j(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0))$	
12.	$\sin(2\pi f_0 t)$		$-j(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0))/2$

(d) Skalning med faktor *a* ↔ Skalning med faktor 1/*a*.
Tidsrevertering ↔ Frekvensrevertering (OW4.3.2 och 4.3.5)

En annan självdual egenskap handlar om vad som sker med skalning av variablerna: Om tidsvariabeln t skalas om till at ($a > 0$), så skalas både transformvärde och frekvensvariabel om med faktorn $1/a$. Om tidsskalan kastas om (tidsrevertering) så kastas även frekvensskalan om:

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
	$x(t)$	$X(j\omega)$	$X(f)$
1.	$x(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$
2.	$\frac{1}{a}x\left(\frac{t}{a}\right),\ a>0$	$X(ja\omega)$	$X(af)$
3.	$x(-t)$	$X(-j\omega)$	$X(-f)$

(e) Pulståg ↔ Pulståg (OW 4.2: ex 4.8)

Funktionerna $\delta(t-n)$ har enligt ovan transformerna $e^{-2\pi jnf}$. Summerar man dessa, så får man att

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$ har transformen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi jnf}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2\pi jnf}=\left[\text{Enligt sambandet (12) sid 21 i Arb.matr 3}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-n)$$

Funktionen $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$ är alltså sin egen fouriertransform (f-varianten)! Om istället ω väljs som frekvensvariabel så får man transformen $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega/(2\pi)-n)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi n)$

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
1.	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$	$2\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n)$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)$

Sampling vid tidpunkterna $t = nT$ svarar mot multiplikation med den generaliserade funktionen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(T(t/T-n)) = \left[\delta(at) = \delta(t)/a\right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T-n).$$

Transformen för denna funktion är enligt skalningsegenskapen ($a = 1/T$):

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
2.	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T-n)$	$2\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n/T)$
3.	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$	$2\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(T\omega - 2\pi n) =$ $2\pi/T \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(Tf-n) =$ $1/T \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n/T)$

(f) rect ↔ sinc (OW 4.1: ex 4.4-5)

Integralen $d_P(\omega) = \int_{-P/2}^{P/2} e^{j\omega t}\, dt$ som beräknades på sidan 38 är också en fouriertransform[7], nämligen den av en funktion som är = 1 i intervallet $-P/2 < t < P/2$ och = 0 f.ö., d.v.s. av funktionen $\mathrm{rect}_p(t)$. Enligt beräkningarna på sid 38ff så har man:

		Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
	1.	$\mathrm{rect}_P(t)$	$P\,\mathrm{sinc}\,(P\omega/(2\pi))$	$P\,\mathrm{sinc}(Pf)$
Speciellt	2.	$\mathrm{rect}_1(t)$		$\mathrm{sinc}(f)$
	3.	$\mathrm{rect}_{2\pi}(t)$	$2\pi\,\mathrm{sinc}\,(\omega)$	
Dualt	4.	$\mathrm{sinc}(Pt)$	$\frac{1}{P}\,\mathrm{rect}_{2\pi P}(\omega)$	$\frac{1}{P}\,\mathrm{rect}_P(f)$
och	5.	$\mathrm{sinc}\,(t/(2\pi))$	$2\pi\,\mathrm{rect}_1(\omega)$	$2\pi\,\mathrm{rect}_1(2\pi f)$
	6.	$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}_1(\omega/(2\pi))$	$\mathrm{rect}_1(f)$

7 Obs att $d_P(\omega)$ är en jämn funktion.

(g) Steg- och signumfunktionerna

Ett intrikatare problem är att beräkna transformerna för stegfunktionen:

$$u(t) = 1, \text{ om } t > 0 \text{ samt } = 0, \text{ om } t < 0$$

och den besläktade signumfunktionen:

$$\mathrm{sign}(t) = \{1, \text{ om } t > 0 \text{ samt } = 1 \text{ om } t < 0\} = 2u(t) - 1.$$

För kännedom meddelas att man kan visa att

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
1.	$u(t)$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\,\delta(\omega)$	$\frac{1}{2\pi \mathrm{j} f} + \frac{1}{2}\,\delta(f)$
2.	$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$	$\frac{1}{\pi \mathrm{j} f}$

(h) Multiplikation ↔ Faltning (OW 4.4-5)

För produkten av två funktioner $x(t)$ och $y(t)$ har man

$$x(t)\cdot y(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\,\phi)\, e^{\mathrm{j}\phi t}\, d\phi \int_{-\infty}^{\infty} Y(\mathrm{j}\,\varphi)\, e^{\mathrm{j}\varphi t}\, d\varphi = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbf{R}^2} X(\mathrm{j}\,\phi)\, e^{\mathrm{j}\phi t}\, Y(\mathrm{j}\,\varphi)\, e^{\mathrm{j}\varphi t}\, d\phi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbf{R}^2} X(\mathrm{j}\,\phi) Y(\mathrm{j}\,\varphi)\, e^{\mathrm{j}(\phi + \varphi)t}\, d\phi\, d\varphi = \left[\text{Substituera: } \left\{\begin{array}{l}\omega = \phi + \varphi, \\ \phi = \phi.\end{array}\right\}, d\phi\, d\varphi = d\phi\, d\omega \right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbf{R}^2} X(\mathrm{j}\,\phi) Y(\mathrm{j}(\omega - \phi))\, e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\phi\, d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\,\phi) Y(\mathrm{j}(\omega - \phi))\, d\phi\right) e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Z(\mathrm{j}\omega)\, e^{\mathrm{j}\omega}\, d\omega,$$

där $Z(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\,\phi) Y(\mathrm{j}(\omega - \phi))\, d\phi = (X * Y)(\mathrm{j}\omega)$ tydligen är transformen av $x(t)\cdot y(t)$.

Man har alltså

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
1.	$x(t)\cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(\mathrm{j}\omega)$	$(X * Y)(f)$
2. Dualt	$(x * y)(t)$	$X(\mathrm{j}\omega)\cdot Y(\mathrm{j}\omega)$	$X(f)\cdot Y(f)$

Anmärkning: Att faltning efter fouriertransformation svarar mot multiplikation följer också ganska direkt av exponantialfunktionens roll som egenfunktion (se avsnitt 6.1.3). Vi har:

$$x(t) * e^{j\omega t} = X(f)\, e^{j\omega t},$$
$$y(t) * e^{j\omega t} = Y(f)\, e^{j\omega t},$$

Låter vi $Z(\omega)$ stå för transformen av $x(t) * y(t)$ så har vi (för fixt men godtyckligt ω och variabelt t):

$$\begin{aligned} Z(\omega) \cdot e^{j\omega t} &= (x(t) * y(t)) * e^{j\omega t} = x(t) * (y(t) * e^{j\omega t}) = x(t) * Y(\omega) \cdot e^{j\omega t} \\ &= Y(\omega) \cdot (x(t) * e^{j\omega t}) = Y(\omega) \cdot X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Division med faktorn $e^{j\omega t}$ ger resultatet

$$Z(\omega) = Y(\omega) \cdot X(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega).$$ ♦

(i) Derivering ↔ Multiplikation med variabel (OW 4.3.4)

Deriverar man analysekvationen får man

$$x'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega\; X(f)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

där man avläser att derivatans fouriertransform = $j\omega\; X(f)$:

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
1.	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(j\omega)$	$2\pi j f X(f)$
2. Dualt	$t\, x(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$

För högre derivator får man motsvarande:

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
1.	$\left(\frac{d}{dt}\right)^n x(t)$	$(j\omega)^n X(j\omega)$	$(2\pi j f)^n X(f)$
2. Dualt	$t^n x(t)$	$j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(j\omega)$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f)$

Exempel att titta på: I OW ex 4.1 – 5., 9 – 13.

Av särskilt intresse är

(j) Funktioner med rationella fouriertransformer

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
1. Då n heltal ≥ 0	$\delta^{(n)}(t)$	$(\mathrm{j}\omega)^n$	$(2\pi\mathrm{j}f)^n$
2. Då $a > 0$	$\mathrm{e}^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$	$\dfrac{1}{a+2\pi\mathrm{j}f}$
3. och n heltal ≥ 1	$\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!}\,u(t)$	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^n}$	$\dfrac{1}{(a+2\pi\mathrm{j}f)^n}$
4.Då $a < 0$	$\mathrm{e}^{-at}u(-t)$	$\dfrac{1}{a-\mathrm{j}\omega}$	$\dfrac{1}{a-2\pi\mathrm{j}f}$
5. och n heltal ≥ 1	$\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!}\,u(-t)$	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^n}$	$\dfrac{1}{(a+2\pi\mathrm{j}f)^n}$
6.	$\operatorname{sign} t$	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$	$\dfrac{1}{\pi\mathrm{j}f}$
7. Då n heltal ≥ 1	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\operatorname{sign} t$	$\dfrac{2}{(\mathrm{j}\omega)^n}$	$\dfrac{2}{(2\pi\mathrm{j}f)^n}$
8. Då $a > 0$	$\mathrm{e}^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$	$\dfrac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
9. Då $a > 0$	$\mathrm{e}^{-a\|t\|}\,\operatorname{sign} t$	$-\dfrac{2\mathrm{j}\omega}{a^2+\omega^2}$	$-\dfrac{4\mathrm{j}f}{a^2+(2\pi f)^2}$

Andra rationella funktioner kan man återtransformera genom att kombinera informationen i tabellen med partialbråksuppdelning, linearitet och förskjutningsegenskapen (c) ovan bestämma den funktion den är transform av:

Exempel 6.2

a. Bestäm $x(t)$ så att $X(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}$.

Lösning: Nämnaren har nollställena $\omega^2 = -1$ och $\omega^2 = -2$ och kan därför faktoruppdelas:

$$\omega^4+3\omega^2+2 = (\omega^2+1)(\omega^2+2).$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2} = \frac{2}{\omega^2+2} - \frac{1}{\omega^2+1}$$

Låter vi parametern a i (j8) ovan spela rollen av $\sqrt{2}$ respektive 1, så ger tabellinformationen att det första bråket är transform av $2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}|t|}$ och det andra av $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|t|}$.Man får

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}|t|} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|t|}.$$

b. Bestäm $x(t)$ så att $X(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{\omega^2+4\omega+5}$.

Lösning: Kvadratkomplettering av nämnaren ger $(\omega + 2)^2 + 1$. $X(j\omega)$ har alltså formen $Y(j(\omega + 2))$ där $Y(j\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$. Man har då

$$\frac{1}{\omega^2+1} \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} \frac{1}{2}\, e^{-|t|}$$

och via förskjutning
$$\frac{1}{(\omega+2)^2+1} \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} e^{j(-2)t} \cdot \frac{1}{2}\, e^{-|t|} = x(t).$$

c. Bestäm $x(t)$ så att $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega^2 - 5\omega - 6j}$.

Lösning: På vanligt sätt bestämmer man nollställena till andragradspolynomet i nämnaren. De är $\omega = -2j$ och $\omega = -3j$. Nämnaren kan därför skrivas $j(\omega + 2j)(\omega + 3j)$. Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{j\omega^2 - 5\omega - 6j} = \frac{1}{j(\omega + 2j)(\omega + 3j)} = \frac{1}{\omega + 3j} - \frac{1}{\omega + 2j}.$$

Vi får
$$\frac{1}{\omega + 3j} \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} e^{-3t}\, u(t)$$
$$\frac{1}{\omega + 2j} \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} e^{-2t}\, u(t)$$

varför
$$X(j\omega) \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} x(t) = (e^{-3t} - e^{-2t})\, u(t) = \begin{cases} e^{-3t} - e^{-2t}, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

d. Bestäm $x(t)$ så att $X(j\omega) = \frac{\omega^4 + 1}{\omega^2 + 1}$.

Lösning: Nämnarens grad är inte lägre än täljarens. Division med rest ger då omskrivningen

$$\frac{\omega^4 + 1}{\omega^2 + 1} = \omega^2 - 1 + \frac{2}{\omega^2 + 1}. \qquad \text{(Kontrollera!)}$$

Enligt (j1) och (j8) har man

$$\omega^2 \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} -\delta''(t)$$
$$1 \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} \delta(t)$$
$$\frac{2}{\omega^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} e^{-|t|}$$

Detta ger att
$$x(t) = -\delta''(t) - \delta(t) + e^{-|t|}.$$
♦

Övningar: Se kap 5 i exempelsamlingen. Här kommer ett par till:

6.5 Bestäm fouriertransformen med f som variabel av $\mathrm{sinc}^2(t)$ genom att använda tabellen vid (f) ovan och produkt-faltnings-sambandet j. (Se också övning 6.1i ovan.)

6.6 **a.** Härled (j4) genom att kombinera (j2) och tidsrevertering (d3).

b. Härled (j9) genom att kombinera (j2) och (j4).

6.7 Använd tekniken med uppdelning i partialbråk för att bestämma funktionerna $x(t)$ som har följande fouriertransformer:

a. $\dfrac{1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$, b. $\dfrac{\omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$,

c. $\dfrac{j\omega}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$, d. $\dfrac{j}{\omega^3 + 9\omega}$,

e. $\dfrac{\omega^2}{\omega^2 + 9}$.

(k) Transform av primitiv funktion (OW 4.3.4)

Den primitiva funktionen $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ kan ses som en faltning: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$ = $(x * u)(t)$, Dess transform är alltså $X(j\omega)\cdot\left(\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta(f)\right) = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\,\delta(\omega)$.

(l) Sampling med sampelavstånd $T \leftrightarrow$ (1/T)-periodisk fortsättning

Om en signal $x(t)$ samplas vid tidpunkterna $t = nT$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, så ges (se §4.3, sid 23) motsvarande sampelfunktion av

$$x_{\text{sampel}}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Eftersom enligt (e3) med f som variabel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$$

och produkt svarar mot faltning så är sampelsignalens transform:

$$X_{\text{sampel}}(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - n/T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T).$$

Man ser här att om frekvensvariabeln f används på transformsidan:

	Funktion	Transform (f)
	$x(t)$	$X(f)$
1.	Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$1/T$-periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(f)$
2. Dualt	P-periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $1/P \cdot X(f)$ med sampelavstånd $1/P$

Med vinkelfrekvensen ω som variabel får man det mindre symmetriska

	Funktion	Transform (ω)
	$x(t)$	$X(j\omega)$
3.	Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$2\pi/T$-periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(j\omega)$
4. Dualt	P-periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $1/P \cdot X(j\omega)$ med sampelavstånd $2\pi/P$

Vid sampling är alltså transformens värde för en frekvens f (alt. ω) proportionell mot summan av värdena av X i de ∞ många frekvenserna på avståndet n/T från f (alt. $2\pi n/T$). Dessa olika X-värden kan alltså inte särskiljas om man bara känner till X_{sampel}. (Jämför också fig 7.15-16 i OW 7.3.)

(m) Fourierserie som specialfall av fouriertransform (OW 4.2)

Fouriertransformen handhar i princip alla typer av signaler. Fourierserierna däremot handlar bara om periodiska signaler. Man kan då misstänka att fourierserieteorin är ett speciellt fall fouriertransform-teorin. Att så faktiskt är fallet kan man inse så här:

Varje P-periodisk funktion $x(t)$ är den P-periodiska fortsättningen av funktionen:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t), & \text{om } |t| < P/2, \\ 0, & \text{om } |t| > P/2. \end{cases}$$

Enligt 4:e punkten i tabellen i (l) ovan kommer fouriertransformen $X(\mathrm{j}\omega)$ att vara samplingen av $\frac{1}{P}\, X_0(\mathrm{j}\omega)$ i punkterna $\omega = \frac{2\pi n}{P}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, d.v.s.

$$X(\mathrm{j}\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{P} X_0(2\pi \mathrm{j}\, n/P)\, \delta(\omega - 2\pi n/P).$$

Så när som på en gemensam faktor 2π, så är den n:te koefficienten i detta pulståg,

$$\frac{1}{P} X_0\left(\frac{2\pi n}{P}\right) = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x(t)\, e^{-2\pi \mathrm{j} nt/P}\, dt = a_n,$$

tydligen identisk med den n:te fourierseriekoefficienten för $x(t)$

Syntesekvationen (6.3) för fouriertransformen ger sedan

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, \delta(\omega - 2\pi n/P)\, e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/P)\, e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi \mathrm{j} tn/P},$$

vilket är syntesekvationen fourierserier. ♦

Exempel att titta på: OW 4.6 – 8, 4.20 – 23

6.4 Parsevals relation. Informellt om utveckling i ortogonalbaser, signaler med ändlig energi och minstakvadratanpassning

Analys- och syntesekvationerna för fourierserierna kunde ges en ”geometrisk” tolkning (§5.5 Samband mellan fourierserier och minstakvadratapproximation, sid 32 -):

En del av sambanden mellan en funktion $x(t)$ och dess fouriertransform $X(\mathrm{j}\omega)$ kan uttydas på ett liknande sätt:

Syntesekvationen för $\mathcal{FT}$ $\qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega,$

kan ses som att man skrivit $x(t)$ som en linjär kombination av ”basvektorer” $v_\omega(t) = e^{\mathrm{j}\omega t}$, där parametern ω svarar mot nummervariabeln $2\pi n$ ovan och $X(\mathrm{j}\omega)$ mot respektive koordinat. Definierar man ”skalärprodukt” mellan två ”vektorer” som i (4.16) (se sid 35 i arb.matr. 3), fast med integrationen utsträckt över hela reella tallinjen,

$$(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

så kommer basvektorerna vara parvis vinkelräta också här. Man har nämligen:

$$(v_\omega(t), v_\eta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\eta t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}t(\omega - \eta)}\, \mathrm{d}t = \left[\text{Enligt (6.5)}\right] = 2\pi\,\delta(\omega - \eta) = 0 \text{ om } \omega \neq \eta.$$

”Koordinaterna” för $x(t)$ i ”v-basen” erhålls nu enligt analysekvationen enligt

$$X(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{d}t\,,$$

vilket med skalärprodukten kan skrivas $\dfrac{(x(t), u_f(t))}{2\pi}$.[8]

Parsevals relation för $\mathcal{FT}$´

För signaler $x(t)$ där

$$||x(t)||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, \mathrm{d}t$$

är konvergent – d.v.s. de som har en (ändlig) total energi[9] – kan man också visa en ”Parsevalsk” relation. Speciellt enkel är den om frekvensvariabeln f väljs på transformsidan:

”Vektorns längd” i kvadrat = ”Summan” (läs *integralen*) av beloppskvadraterna på ”koordinaterna” $X(f)$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, \mathrm{d}t = ||x(t)||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, \mathrm{d}f} \tag{6.14}$$

För ω-variabeln får man istället

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\mathrm{j}\omega)|^2\, \mathrm{d}\omega} \tag{6.14´}$$

8 Analogin med formelmaskineriet för fourierserierna är dock inte alldeles fullständig här. Skalärprodukten $(v_\omega(t), v_\eta(t)) = 2\pi\delta(\omega - \eta)$ har för $\omega = \eta$ inget (reellt eller komplext) värde. ”Normen” $||v_\omega(t)||$ är från den synpunkten en meningslöshet. Syntesekvationen $X(f) = (x(t), v_\omega(t))$ jämfört med relationen (6.13) skulle däremot svara mot att $||v_\omega(t)|| = \sqrt{2\pi}$.

9 Alla funktionerna som vi betraktar i den matematiska modellen för signalteorin är inte av det slaget. Exempelvis är den totala energin hos konstanterna $\neq 0$ och hos δ-pulserna inte ändlig och inte heller hos periodiska funktioner i allmänhet.

Exempel 6.3

För funktionen $x(t) = \text{rect}_1(t)$ är normkvadraten (totalenergin)

$$||x(t)||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} 1^2 \,\mathrm{d}t = 1,$$

och vi vet (se §6.3(f)) att $X(f) = \text{sinc}\, f$. Parsevals relation utsäger då att

$$1 = ||X(f)||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 f \,\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi f}{\pi^2 f^2} \,\mathrm{d}f.$$

Efter litet hyfsning (sätt $\pi f = \tau$) kan detta skrivas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} \,\mathrm{d}\tau = \pi.$$

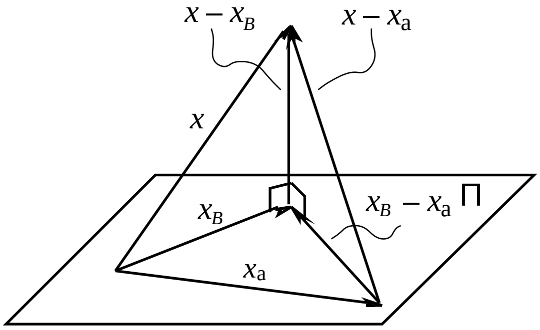
♦

Minstakvadratapproximation och $\mathcal{FT}$

Liksom för fourierserierna finns för fouriertransformen en kopplingtillminstakvadratapproximationer. Vill man approximera signalen $x(t)$ med en ”linjär kombination” av harmoniska svängningar med frekvenser f som inte överskrider ett visst tröskelvärde, $|f| \leq B$ (”bandbegränsnimg”),

$$x_a(t) = \int_{-B}^{B} a(\omega)\cdot e^{j\omega t} \,\mathrm{d}\omega,$$

så är $a(\omega) = X(j\omega)$ det bästa valet av ”viktsfunktionen” $a(\omega)$ om man vill att ”energiförlusten” $||x(t) - x_a(t)||^2$ skall vara så liten som möjligt.



Π: De funktioner som är linjära kombinationer av $e^{j\omega t}$ med $|\omega| \leq B$.

Om nämligen

$$x_B(t) = \int_{-B}^{B} X(j\omega)\cdot e^{j\omega t} \,\mathrm{d}\omega,$$

så är ”felfunktionen”

$$x(t) - x_B(t) = \int_{|\omega| > B} X(j\omega)\cdot e^{j\omega t} \,\mathrm{d}\omega \quad e^{j\omega t}$$

för alla $|\omega| \leq B$ och därmed också vinkelrät mot alla linjära kombinationer av dessa. Hit hör funktionerna x_a och x_B och deras differens $x_B - x_a$. För felet (läs ”energiförlusten”) som man gör med approximationen x_a gäller därför (se figuren – tänk på Pythagoras' sats):

$$||x(t) - x_a(t)||^2 = ||(x(t) - x_B(t)) + (x_B(t) - x_a(t))||^2 = ||x(t) - x_B(t)||^2 + ||x_B(t) - x_a(t)||^2 =$$

$$= ||x(t)||^2 - ||x_B(t)||^2 + ||x_B(t) - x_a(t)||^2 \geq ||x(t)||^2 - ||x_B(t)||^2. \qquad (6.15)$$

Felet är alltså minst $= ||x(t)||^2 - ||x_a(t)||^2$ och detta uppnår man om och endast om $||x_B(t) - x_a(t)|| = 0$, d.v.s. om och endast om $x_B(t) = x_a(t)$.

Övningar: OW 4.10, 4.14, Exsamling 5.21.

6.8 Ett idealt lågpassfilter har den egenskapen att det släpper igenom en signals alla frekvenser ω upp till en viss nivå L med oförändrade amplituder, medan de högre frekvenserna inte släpps igenom alls. .

a. Om $x(t)$ har fouriertransformen $X(\mathrm{j}\omega)$, uttryck med hjälp av rect-funktionen transformen $X_L(\mathrm{j}\omega)$ för den filtrerade signalen $x_L(t)$.

b. Bestäm $X_L(\mathrm{j}\omega)$ då $x(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t)$. $\mathrm{u}(t)$ = ”enhetssprånget” (Heavisides funktion).

c. Hur stor andel av signalens energi går förlorad vid filtreringen? Ge en formel för detta i det allmänna fallet och tillämpa den på det speciella fallet i b-uppgiften.

d. Verifiera att den andelen för stora L approximativt är $= \dfrac{2}{\pi L}$ för fallet i b-uppgiften.

e. Vilken är den filtrerade signalen för signalen i b-uppgiften? Svaret får innehålla integraler.

Svar till övningarna:

6.1. a. 2, b. e^{t}, c. e^{-t}, d. $2t$,

e. 1. f. t, g. $t^2 + \frac{1}{12}$,

h. $\begin{cases} 1, & \text{om } t > 1/2, \\ t + 1/2, & \text{om } |t| \le 1/2, \\ 0, & \text{om } t < -1/2, \end{cases}$ i. $1 - |t|$, om $|t| \le 1$, 0 annars,

j. $\left.\begin{cases} t & \text{om } t \ge 0, \\ 0, & \text{om } t < 0, \end{cases}\right\} = t \cdot \mathrm{u}(t)$, k. $(e^{1/2} - e^{-1/2})\, e^{-t}$,

l. e^{2t}, m. e^{jt}, n. $\cos t$, o. $\sin t$,

p. $\delta(t - 2)$.

6.4 $x(t) * \cos(\omega t) = \mathrm{j}\, X(\mathrm{j}\omega) \cdot \sin(\omega t)$ och $x(t) * \sin(\omega t) = -\mathrm{j}\, X(\mathrm{j}\omega) \cdot \cos(\omega t)$.
(Obs att $x(t)$ är udda och reellvärd (om och) endast om $X(\mathrm{j}\omega)$ är (udda och) imaginär, d.v.s. har realdel = 0.)

6.5. $1 - |f|$, om $|f| \le 1$; 0 annars.

6.7 a. $\frac{1}{6} e^{-|t|} - \frac{1}{12} e^{-2|t|}$, b. $-\frac{1}{6} e^{-|t|} + \frac{1}{3} e^{-2|t|}$, c. $\left(\frac{1}{6} e^{-2|t|} - \frac{1}{6} e^{-|t|}\right) \operatorname{sign} t$,

d. $\frac{1}{18}\left(e^{-3|t|} - 1\right) \operatorname{sign} t$, e. $\delta(t) - \frac{3}{2} e^{-3|t|}$.

6.8 a. $X_L(\mathrm{j}\omega) = X(\mathrm{j}\omega) \cdot \mathrm{rect}_{2L}(\omega)$.

b. $X_L(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega} \cdot \mathrm{rect}_{2L}(\omega)$.

c. $$1 - \frac{\int_{-L}^{L} |X(\mathrm{j}\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\mathrm{j}\omega)|^2 \, d\omega}$$ respektive $1 - \frac{2}{\pi} \arctan L = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{L}$.

d. Använd t.ex. MacLaurinutvecklingen: $\arctan s = s + O(s^3)$. Sätt $s = \frac{1}{L}$ i denna.

e. $$x_L(t) = x(t) * \left\{\frac{L}{\pi} \cdot \operatorname{sinc} \frac{Lt}{\pi}\right\} = \frac{L}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\tau} \operatorname{sinc} \frac{L(t - \tau)}{\pi} \, d\tau = \frac{L}{\pi} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \operatorname{sinc} \frac{L\tau}{\pi} \, d\tau =$$

$$= \frac{L}{\pi} e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \operatorname{sinc} \frac{L\tau}{\pi} \, d\tau = \frac{1}{\pi} e^{-t} \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{\tau} \sin L\tau}{\tau} \, d\tau$$