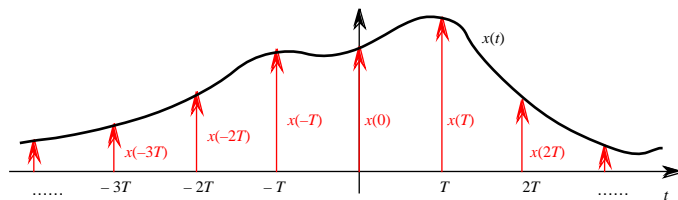


7. Sampling och rekonstruktion av signaler

(OW 7.1 – 2)

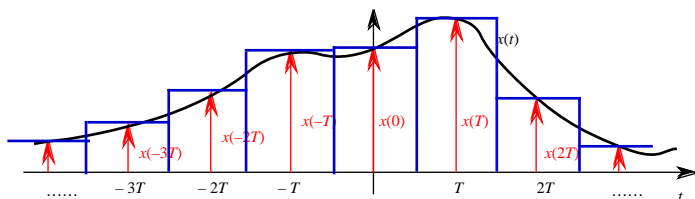
7.1 Sampling och fouriertransformering

Man säger att man *samplear* en signal $x(t)$ vid tiderna $t = nT, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ om man avläser (anger) värdena $x[n] = x(nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Konstanten T är då *sampleingsavståndet* och $1/T = f_s$ *sampleingsfrekvensen*. Alternativt (se §4.3, sid 23 i arbmatr 3) kan man säga att samplingen beskrivs av *sampleingsfunktionen*



$$\hat{x}_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (7.1)$$

som är ett pulståg som i figuren ovan. Lägg märke till att $\hat{x}_s(t)$ är produkten av $x(t)$ med en speciell av $x(t)$ oberoende funktion: enhetspulståget i samplepunkterna.



Samtidigt kan funktionen $\hat{x}_T(t) = T \cdot \hat{x}_s(t)$ för små T uppfattas som en slags approximation till $x(t)$. Man har nämligen för godtyckliga integrationsintervall:

$$T \cdot \hat{x}_s(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T x(nT) \delta(t - nT) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T x(nT) \int_{nT}^{(n+1)T} \delta(t - nT) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T x(nT) \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) dt$$

Ett sätt att närmare analysera felet i approximationen $T \cdot \hat{x}_s(t) \approx x(t)$ är att se efter vilken relation man har mellan fouriertransformerna, $\hat{X}_s(j\omega)$ och $X(j\omega)$, för $\hat{x}_s(t)$ och $x(t)$.¹Faltningssatsen

$$x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

använd på (7.1), tillsammans med

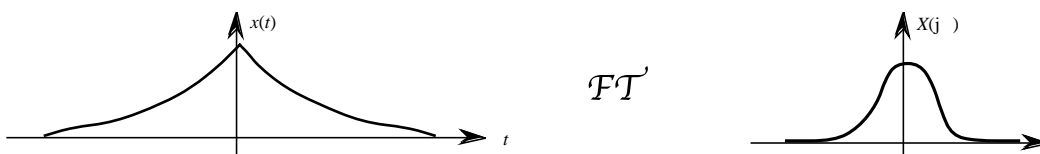
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T) \quad (\S 6.3(e), \text{ sid 53-54 i arbmatr 4})$$

att

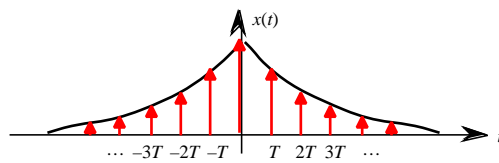
$$\hat{X}_s(j\omega) = \frac{1}{T} X(j\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - 2\pi n/T)) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - 2\pi n/T)),$$

d.v.s.

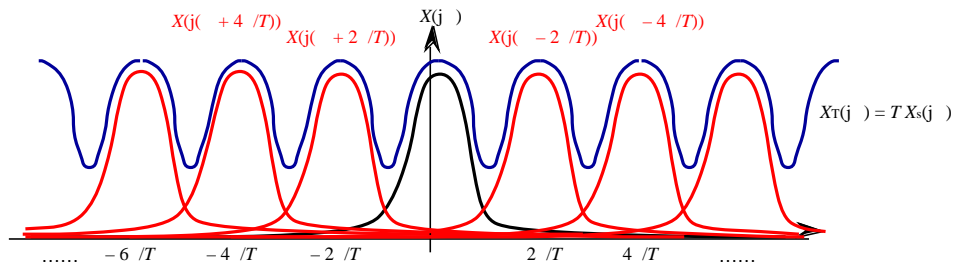
$$\hat{X}_T(j\omega) = T \cdot \hat{X}_s(j\omega) \text{ är den } \frac{2\pi}{T} \text{-periodiska fortsättningen av } X(j\omega). \quad (7.2)$$



¹ Se också (l) på sidan 59 i uppräknigen av fouriertransformens egenskaper i arbetsmaterial nr 4.



\mathcal{FT}

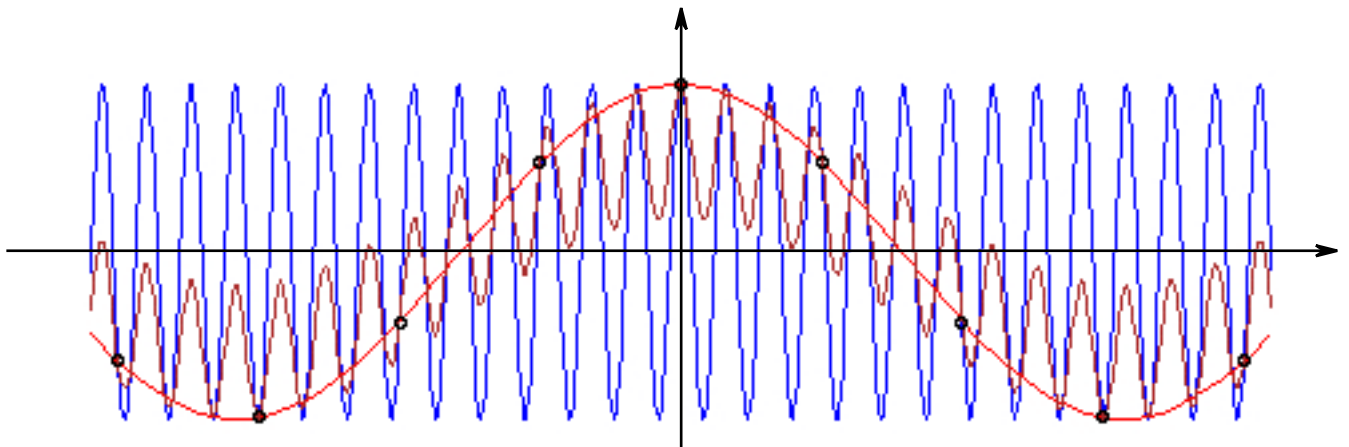


Värdet av $\hat{X}_T(j\omega_0)$ för ett visst ω_0 är alltså beroende *enbart* av värdena hos $X(j\omega)$ vid frekvenserna $\omega = \omega_0 - 2\pi n/T, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (och är summan av alla dessa X -värden). Om man samplar en signal med sampelintervallet T , så kan man inte utifrån enbart sampelvärdena separera två frekvenser från varandra om de skiljer sig på en heltalsmultipel av $2\pi/T$. Detta fenomen kallas *aliasseffekten*. (Se OW §7.3.)

Exempel 7.1:

Om signalerna $x(t) = \cos t$, $y(t) = \cos(1 + 2\pi)t$ och $z(t) = 0.4x(t) + 0.6y(t)$ samplas med sampelavståndet 1, så får man samma sampelvärden $x(n) = y(n) = z(n) = \cos n$ i alla tre fallen med den

gemensamma sampelfunktionen $\hat{x}_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\cos n) \delta(t - n)$



$x(t) = \cos t$, $y(t) = \cos(1 + 2\pi)t$ och $z(t) = 0.4x(t) + 0.6y(t)$ samplade vid $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Man kan här utifrån sampelvärdena inte särskilja förekomsten av harmoniska svängningar vars frekvens skiljer sig på heltal.

Övning

7.1 Bestäm $\hat{X}_T(j\omega)$ då $\hat{x}_s(t)$ är som i exempel 7.1.

7.2 Verifiera att den 1-periodiska fortsättningen av sinc är konstantfunktionen 1.

(Ledning: Återtransformera sinc och sampla sedan den funktionen med sampelavståndet 2π . Bestäm motsvarande $\hat{x}_T(t)$ och använd (7.2).)

7.2 Bandbegränsade signaler (OW 7.1.1)

För att undvika krånglande med diverse 2-faktorer använder vi i det här avsnittet huvudsakligen frekvensvariabeln f på transformsidan.

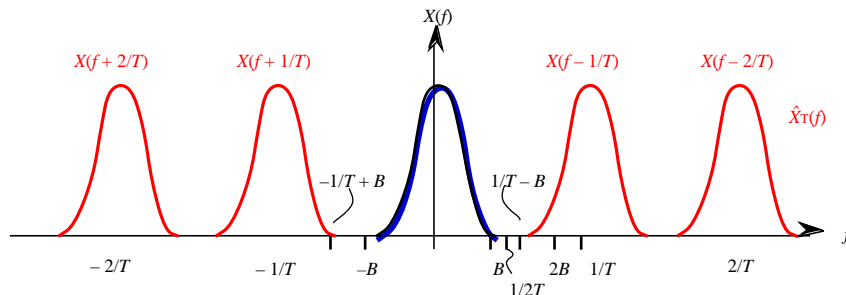
Transformen av $x(t)$ betecknas som i Josefssons formelsamling $X(f)$

En godtycklig signal $x(t)$ kan, rimligt nog, inte återskapas av sampelvärdena $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ men om fouriertransformen $X(f)$ avklingar mot 0 då f (ungefär som i fig på föregående sida) och T väljs så litet att $X(f - n/T)$ är försumbara jämfört med $X(f)$ om n heltal $\neq 0$, och då f ligger i ett intervall $|f| < B$, så har man att

$$\hat{X}_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T) \quad X(f), \text{ då } |f| < B.$$

Ett extremt men viktigt sådant fall är, då $X(f) = 0$ utanför ett intervall $|f| < B$. Signaler $x(t)$ med den egenskapen kallas *bandbegränsade* med *bandbredden* B (den mäts i allmänhet i Hz).

Om man för sådana signaler väljer samplingsfrekvensen $f_s = \frac{1}{T}$ så stor att $f_s > 2B$, så kommer för varje f bara en av termerna i (7.2) att kunna vara $\neq 0$.

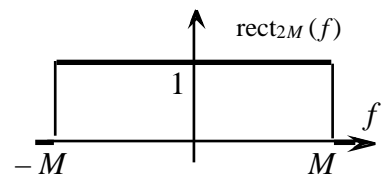


I intervall $|f| < M$ där $B < M < \frac{1}{T} - B$ (7.3)

har vi därmed den *exakta* likheten $\hat{X}_T(f) = X(f)$.

Utanför sådana intervall vet vi att $\hat{X}_T(f) = 0$. Annorlunda uttryckt,

$$X(f) = \hat{X}_T(f) \cdot \text{rect}_{2M}(f). \quad (7.4)$$



Man får det anmärkningsvärda resultatet att $X(f)$, och därmed $x(t)$, kan återskapas till fullo ur sampelvärdena! Återtransformering av (7.4) ger dessutom en explicit formel för detta:

Eftersom² $\text{rect}_{2M}(f)$ är transformen av $2M \text{sinc}(2Mt)$, så är

$$\begin{aligned} x(t) &= T \hat{x}_s(f) * 2M \text{sinc}(2Mt) = \text{Enligt (7.1)} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) (t - nT) * 2M \text{sinc}(2Mt) = \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) (t - nT) * 2M \text{sinc}(2Mt) = 2TM \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc}(2M(t - nT)) \end{aligned}$$

Väljer man $M = \frac{1}{2} f_s = \frac{1}{2T}$, vilket alltid är förenligt med $f_s > 2B$ och (7.3), så får man

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc} \frac{t - nT}{T}$$

och sammanfattningsvis den så kallade *samplingssatsen*:

² Se (f4) i tabellen sid 54 i arbetsmaterial 4.

Samplingsatsen: (OW sid 518, och även sambandet (7.11) på sid 523)

Om signalen $x(t)$ är bandbegränsad med bandbredd B , så gäller om signalen samplas med samplingsfrekvensen $f_s = 1/T = 2B$, att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc} \frac{t - nT}{T} .$$

Den i detta sammanhang "mest ekonomiska" = minsta tänkbara samplingsfrekvensen är $= 2 \times$ bandbredden B . Bandbredden själv kallas också signalens *Nyquistfrekvens*. (I OW sid. 519: *Nyquist frequency*, den optimala samplingsfrekvensen $2 \times B$ kallas där *Nyquist rate*.³)

Anmärkning: Det mänskliga örat anses inte kunna höra ljud med frekvenser högre än dryga 20 kHz. Vid digitala ljudupptagningar samplar man därför den analoga ljudsignalen med en dubbelt så stor frekvens (c:a 44 kHz).

"Verkliga" signaler är rimligtvis $\neq 0$ endast i ett begränsat tidsintervall (de är *tidsbegränsade*). Tyvärr(?) medför detta, som man kan visa, att de då inte kan vara bandbegränsade (med ett ointressant undantag – signalen $x(t) = 0$ för alla t). Däremot finns det i teorin gott om signaler som visserligen inte är bandbegränsade, men där fouriertransformen avklingar "snabbt" mot 0 då $f \rightarrow \pm \infty$. För denna typ av signaler kan man förvänta sig att $X(f) \approx \hat{X}_T(f)$ gäller för åtminstone för "små" f .

Övning 7.3

En signal $x(t)$ med bandbredden $< \frac{1}{3}$ Hz samplas vid tidpunkterna $t = n$ (t mäts i sekunder) och man får sampelvärdena $x[n] = \cos n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Vilken är signalen? Vilken serieframställning av signalen ger samplingsatsen?

8. Den tidsdiskreta fouriertransformen (TDFT)

(OW kap 5)

8.1 Definitioner

Tillämpar man analyskvationen för FT på sambandet (7.1), så får man att

$$\hat{X}_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\infty}^{\infty} (t - nT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jnT} , \quad (7.5)$$

där det återigen framgår att $\hat{X}_s(j\omega)$ är en $2\pi/T$ -periodisk funktion. För fallet $T = 1$ får vi med OW:s beteckning (se OW sid 360 (5.3))

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn} .} \quad (4) \quad (7.5')$$

Sambandet (7.5') kan också ses som fourierserieutvecklingen av den 2π -periodiska funktionen $X(e^{j\omega})$ där $x[n]$ är fourierkoefficienten för den harmoniska svängningen e^{-jn} (obs tecknet!), Synteskvationen för FS ger då att

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn} d\omega} \quad (7.6)$$

³ Obs. Risk för begreppsförvirring här!

⁴ Funktionen $X(z)$ står då för serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$. Valet av beteckning kan synas litet märkligt men författarna vill genom detta markera släktskapen med en annan typ av transform, den s.k. z -transformen. Denna behandlas dock först i lärobokens 10:e kapitel och hör inte till den här kursen.

Sambandet (7.5') ordnar tydligen en 2-periodisk funktion till "varje" talföljd $x[n]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ och sambandet (7.6) ger den inversa tillordningen från 2-periodiska funktioner till talföljder. Detta är den så kallade *tidsdiskreta fouriertransformen* (TDFT:n), (7.5') är analyskvationen och (7.6) synteskvationen.

I annan litteratur – exempelvis i Josefssons formelsamling – används i stället den så kallade *normerade frekvensen* $\omega = \frac{\Omega}{2}$ som frekvensvariabel. Med beteckningen $X_d(\omega)$ för motsvarande transform, som då är en 1-periodisk funktion, får man formelparet:

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j n \omega} \quad (7.7)$$

och

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X_d(\omega) e^{j n \omega} d\omega \quad (7.8)$$

Man återfår förstås (7.5) ur (7.7) respektive (7.5') genom att sätta $2\omega = T\Omega$ respektive byta ω mot $T\Omega$. Approximationen $T\hat{x}_s(t) \approx x(t)$ och $T\hat{X}_s(j\Omega) \approx X(j\Omega)$ kan därför skrivas

$$X(j\Omega) \approx T X_d(T\Omega/2) = T X(e^{jT\Omega}) \quad (7.9)$$

Vid tillräckligt tät sampling kan man förvänta sig att TDFT:n av *följden av sampelvärden* via sambandet (7.9), för "små" T levererar en approximation till fouriertransformen för den samplade funktionen.

8.2 Dualiteten mellan TDFT och FS

Som framgår ovan är den nära förknippad med fourierserie-transformen. Man har tydligen de duala relationerna:

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{T}DFT} X_d(\omega) \quad x[n] \xrightarrow{\mathcal{FS}^{-1}} X_d(-\omega) \quad (7.10)$$

$$X_d(\omega) \xrightarrow{\mathcal{T}DFT^{-1}} x[n] \quad X_d(\omega) \xrightarrow{\mathcal{FS}} x[-n]$$

Detta och att både FS och TDFT är specialfall av FT gör att egenskaperna hos FT (som presenteras bl.a. i OW 328-9 och i formelsamlingarna) har direkta motsvarigheter för FS och TDFT (se t.ex OW sid 221 och 391). Dualiteten (7.10) kan också utnyttjas för TDFT-transformering när man har tillgång till en FS-tabell och vice versa.

Exempel 8.1

Problem: Bestäm den tidsdiskreta fouriertransformen till talföljden $y[n] = \frac{1}{n}$, då $n \neq 0$, $y[0] = 0$.

Man har tillgång till en tabellsamling om fourierserier, där det står att den 2-periodiska fortsättningen av

$$x(t) = 1 - t/2, \quad 0 < t < 2,$$

har fourierutvecklingen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt.$$

Lösning: Tabellinformationen översatt till komplexa fourierserier (sätt $\sin nt = (e^{jnt} - e^{-jnt})/(2j)$) blir

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} X[n] = \frac{1}{j n} \quad \text{om } n \neq 0 \text{ och } X[0] = 0.$$

Eftersom generellt $x(t)$ och $x(Pt)$ har samma fourierkoefficienter (men olika perioder), så har även den 1-periodiska fortsättningen av $x(2^{-1}t) = 1 - 2^{-1}t$, $0 < t < 1$, dessa fourierkoefficienter.

$$x(2^{-1}t) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} X[n]$$

Dualiteten (7.10) ger då att $X[-n] \stackrel{T'DFT}{\longleftrightarrow} x(2^{-1}t)$

och, eftersom $y[n] = j^{-n} X[n]$; $y[n] \stackrel{T'DFT}{\longleftrightarrow} j^{-n} x(2^{-1}t) = Y_d(\omega)$

$Y_d(\omega)$ är den 1-periodiska fortsättningen av $j^{-n} (1 + 2^{-1}t)$, $-1 < t < 0$ eller uttryckt på OW:s vis

$Y(e^{j\omega})$ är den 2-periodiska fortsättningen av $j^{-n} (1 + 2(1/2)^n) = j^{-n} (1 + 2^{-n})$, $-2 < \omega < 0$.

8.3 Cirkulär faltning (OW sid 221 och 391-2)

De flesta egenskaperna hos FT "ärvs" av FS och TDFT på ett rättframt sätt. Ett undantag är möjligen faltningsegenskapen, som för T -periodiska fourierserier visar sig ha formen:

Om $x(t) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} x[n]$

och $y(t) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} y[n]$

så är
$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot y(t - \tau) d\tau \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} T \cdot x[n] \cdot y[n] \quad (7.11)$$

Integralen i vänster led, vars integrationsintervall *inte* är hela reella talmängden, brukar kallas den *cirkulära faltningen* av x och y . En beteckning som ibland används är $x \circledast y$. Integrationsintervallet kan f.ö. ersättas med vilket som helst intervall med längd T eftersom integranden är T -periodisk.

Översatt till TDFT-fallet, där $T = 1$ för "-varianten", blir detta:

Om $x[n] \stackrel{T'DFT}{\longleftrightarrow} X_d(\omega) = x(-\omega)$

och $y[n] \stackrel{T'DFT}{\longleftrightarrow} Y_d(\omega) = y(-\omega)$

så gäller

$$\begin{aligned} x[n] \cdot y[n] \stackrel{T'DFT}{\longleftrightarrow} & \int_{-1/2}^{1/2} x(\omega) \cdot y(-\omega) d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} X_d(-\omega) \cdot Y_d(-(-\omega)) d\omega = \\ & \int_{-1/2}^{1/2} X_d(\omega) \cdot Y_d(\omega) d\omega = \text{Byt} \int_{-1/2}^{1/2} X_d(\omega) \cdot Y_d(\omega) d\omega = X_d(\omega) \cdot Y_d(\omega) \end{aligned}$$

Använder man sig i stället av vinkelfrekvensvariabeln ω så uttrycks den cirkulära faltningen på annat sätt:

$$\begin{aligned} X_d(\omega) \cdot Y_d(\omega) &= \int_{-1/2}^{1/2} X_d(\omega) \cdot Y_d(\omega) d\omega = \text{Byt} \int_{-1/2}^{1/2} X_d(\omega) \cdot Y_d(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega}) d\omega \end{aligned}$$

* Egenskapen (7.11) kan bevisas så här: Låt $x(t)$ och $y(t)$ vara två T -periodiska funktioner samt $x[n]$ och $y[n]$ talföljderna som består av deras fourierkoefficienter.

Sätt $z(t) = x(t) \cdot \text{rect}_T(t)$, (d.v.s. z är en "utskuren" period av x). Då är

$$z(t) * y(t) = \int_{-T/2}^{T/2} z(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau = x(t) \cdot y(t).$$

Vidare har man att
$$x(t) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(f - n/T),$$

$$y(t) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m] \delta(f - m/T)$$

och
$$\text{rect}_T(t) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} T \text{sinc}(Tf).$$

Faltningsegenskaperna för FT (vi använder f -variabeln på transformsidan):

$$u * v \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} U \cdot V \text{ samt } u \cdot v \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} U * V,$$

visar då att

$$z(t) = x(t) \cdot \text{rect}_T(t) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(f - n/T) * \text{sinc}(Tf) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{sinc}(Tf - n)$$

och att
$$z(t) * y(t) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{sinc}(Tf - n) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m] \delta(f - m/T) =$$

$$= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} T \cdot x[n] y[m] \text{sinc}(m - n) \delta(f - m/T).$$

Men $\text{sinc}(k) = 0$ för alla heltal $k \neq 0$ och $= 1$ om $k = 0$, d.v.s. $\text{sinc}(m - n) = 0$ då $m \neq n$ och $= 1$ om $m = n$. Detta innebär att dubbelsumman i högerledet ovan kan förenklas till

$$T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[n] \delta(f - n/T),$$

där man avläser fourierkoefficienterna för den T -periodiska funktionen $z(t) * y(t) = x(t) \cdot y(t)$. De är $T \cdot x[n] y[n]$, d.v.s. vi har relationen (7.11)

$$x \cdot y \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} T \cdot x[n] \cdot y[n].$$

Övningar: Exempelsamlingen 6.1 – 6.6.

Svar till övningarna:

$$7.1 \quad \hat{X}_s(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f - k - \frac{1}{2} + f - k + \frac{1}{2} .$$

$$7.3 \quad x(t) = \cos t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n \operatorname{sinc}(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos n \sin (t-n)}{(t-n)} .$$