Allmänt om differentialekvationer

Viktiga begrepp:

- ordinär ekv (ODE), partiell ekv (PDE) (ZC 1.1-2, s. 2–3)
- ordning hos ekv (ZC 1.1-2, s.3)
- linjär ekv (ZC 1.1-2, s.4)
- lösning, lösningsintervall (ZC 1.1-2, s.4–9)

Typisk ODE av ordning 1:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

- med begynnelsevillkor: $y(0) = y_0$ (ZC1.2)
- riktningsfält (ZC2.1)

Viktig sats: *Existens och entydighetssatsen* (Th1.1)

> Om $f(x, y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ är kontinuerliga, så har begynnelsevärdesproblemet:
> $$y'(x) = f(x, y(x)), \; y(0) = y_0,$$
> en och endast en lösning $y(x)$, åtminstone i någon omgivning av $x = x_0$.

I den här kursen ingår lösningsmetoder för följande
speciella typer av ekvationer:

- Separabla ekvationer:
$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \qquad \text{(ZC2.2)}$$
- Linjära ODE av ordning 1 med ”godtyckliga” koefficienter:
$$a_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_0(x) \cdot y = g(x) \qquad \text{(ZC2.3)}$$
- Linjära ODE av godtycklig ordning med konstanta koefficienter (ZC4)
- System av linjära ODE:s av ordning 1 med konstanta koefficienter. (ZC8)

Lösningsförfaranden

Separabla ekvationer: (ZC2.2)

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ eller } h(y) = 0.$$

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; K(y) = G(x) + C,$$ där K och G är några primitiva funktioner till $\frac{1}{h(y)}$ respektive $g(x)$. Lösningen är då på implicit form. I gynnsamma fall kan y sedan lösas ut ur ekvationen $K(y) = G(x) + C$.

Linjära ODE av ordning 1 med ”godtyckliga” koefficienter: (ZC 2.3)

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Division med $a_1(x)$ ger (då $a_1(x) \neq 0$) den ”normerade” formen:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Multipliceras denna med $h(x) = \exp(\int_b^x P(t)\,dt)$ (b något tal i lösningsintervallet), får man den ekvivalenta ekvationen

$$(h\cdot y)' = h\cdot f,$$

vilket efter integration ger

$$y = \frac{1}{h(x)}\left(\int_b^x h(t)\,f(t)\,dt + C\right)$$

Finns begynnelsevillkor, $y(a) = A$, så kan konstanten C bestämmas och man får:

$$y = \frac{1}{h(x)}\left(\int_a^x h(t)\,f(t)\,dt + A\,h(a)\right)$$

Linjära ODE av godtycklig ordning: (ZC 4.1)

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y = \begin{cases} f(x). & \text{Allmänna fallet, (A)} \\ 0. & \text{Homogena fallet, (H)} \end{cases}$$

Generella egenskaper hos lösningarna:

Superpositionsegenskaper:

- y_1 och y_2 lösningar till (H) $\Rightarrow$ $y = c_1y_1 + c_2y_2$ lösningar till (H) för godt. konstanter c_1 och c_2.
- y_1 och y_2 lösningar till (A) $\Rightarrow$ $y = y_1 - y_2$ lösning till (H).
- Om (H) har *reella* koefficienter:

  $y = u + jv$ (u och v reella) en komplex lösning till (H) $\Leftrightarrow$ u och v lösningar till (H).

Lösningmängdernas struktur:

- Allmän lösning till (H):

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

där $y_1, y_2, \dots, y_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och där $c_1, c_2, \dots, c_n$ är godtyckliga konstanter.

- Allmän lösning till (A):

$$y = y_p + y_h$$

där y_p är någon (vilken som helst) lösning till (A) och y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Speciellt för ekvationer med konstanta *koefficienter* $a_{n-1}, \dots a_1, a_0$: (ZC 4.3)

- Karakteristisk ekvation (”Auxiliary Equation”):

$$m^n + a_{n-1} m^{(n-1)} + \dots a_1 m + a_0 = 0. \qquad \text{(K)}$$

- Rötternas relation till ODE:ns lösningar:

  Om m_0 är en rot med multiplicitet α till (K), så är

$$y = q(x) \cdot e^{m_0 x},$$

  där q är ett godtyckligt polynom av grad högst $\alpha - 1$, lösning till (H).

- Den allmänna lösningen till (H) erhålls genom att alla lösningarna, som enligt föregående punkt för finns för de olika rötterna till (K), summeras.

° En partikulärlösning till (A) kan för ”välartade” högerled $f(x)$ erhållas via ansatsförfaranden – se ZC 4.4. ”Välartade” högerled:

  (i) Polynom.

  (ii) e^{ax}, sin ax, cos ax (a konstant – även komplex).

  (iii) Produkter av funktioner av typen (i) och (ii).

  (iv) Summor av funktioner av typen (i) – (iii).