System av linjära differentialekvationer

(ZC8.1 – 2)

Viktiga begrepp:

Linjära ODE-system av ordning 1:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t), \\ \quad \ldots \quad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

eller på matrisform:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t).$$

Homogena system ⇔ $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, (H)

Allmänna system ⇔ $\boldsymbol{f}$ ”godtyckligt”. (A)

System med konstanta koefficienter ⇔ $\boldsymbol{A}$:s alla element är oberoende av t.

Superpositionsegenskaper: (ZC 8.1)

- $\boldsymbol{X}_1$ och $\boldsymbol{X}_2$ lösningar till (H)
  $\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2$ lösningar till (H) för godtyckliga konstanter c_1 och c_2.
- $\boldsymbol{X}_1$ och $\boldsymbol{X}_2$ lösningar till (A)
  $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$ lösning till (H).
- Om (H) har *reella* koefficienter:
  $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} + \mathrm{j}\boldsymbol{V}$ ($\boldsymbol{U}$ och $\boldsymbol{V}$ reella) en komplex lösning till (H) ⇔ $\boldsymbol{U}$ och $\boldsymbol{V}$ lösningar till (H).

Existens- och entydighetssats (Th 8.1)

Om $\boldsymbol{A}(t)$ och $\boldsymbol{f}(t)$ är en kontinuerliga funktioner (d.v.s. om funktionerna $a_{11}(t), \ldots, a_{nn}(t), f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ alla är kontinuerliga), så finns det, för givnet tal t_0 och $\mathbf{R}^n$-vektor (eller $\mathbf{C}^n$-vektor) $\boldsymbol{X}_0$, en och endast en lösning till begynnelsevärdesproblemet:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t) \text{ och } \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0.$$

Förutsättningen är alltid uppfylld för homogena system med konstanta koefficienter.

Lösningmängdernas struktur: (ZC 8.1)

- Allmän lösning till (H):

$$\boldsymbol{X}_h = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{X}_n,$$

där $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och

där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är godtyckliga konstanter.

En sådan uppsättning lösningar kallas en *fundamentalmängd av lösningar* (”fundamental set of solutions”). På matrisform kan detta skrivas:

$$\boldsymbol{X}_h = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi \boldsymbol{c}$$

Φ kallas *fundamentalmatris* (ZC 8.3), en matris som karakteriseras av att

- kolonnvektorerna är n olika lösningar till (H),
- kolonnvektorerna är linjärt oberoende, dvs $\det(\Phi) \neq 0 \Leftrightarrow \Phi$ är inverterbar.

Man har också att

$$\Phi'(t) = \boldsymbol{A}\Phi(t).$$

- Allmän lösning till (A):

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_p + \boldsymbol{X}_h = \boldsymbol{X}_p + \Phi \boldsymbol{c}$$

där $\boldsymbol{X}_p$ är någon (vilken som helst) lösning till (A) och $\boldsymbol{X}_h$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Egenvärdesmetoden för lösning av *homogena* system
(ZC 8.2)

Egenvärdesmetoden för lösning av *homogena* system bygger på ansatsen:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}\, e^{\lambda t},$$

där $\boldsymbol{k}$ är en konstant vektor $\neq \mathbf{0}$ och λ en konstant skalär (reell eller komplex).

Ansatsen leder till följande villkor på λ:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

d.v.s. till polynomekvationen (*egenvärdesekvationen*, *karakteristiska ekvationen*),

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

(Rötterna kallas matrisen $\boldsymbol{A}$:s (eller problemets) *egenvärden*.)

Och följande villkor på $\boldsymbol{k}$:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{k} = \mathbf{0},$$

d.v.s. till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\boldsymbol{k}$-lösningarna $\neq \mathbf{0}$ kallas *egenvektorer*).

Med hjälp av egenvärdesbestämningar kan alltid n st linjärt oberoende lösningar till (H) bestämmas. Typiska exempel:

(i) ZC 8.2, ex.2 (reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

(ii) ZC 8.2, ex. 6 (ickereella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

och de mera ”ovanliga” fallen:

(iii) ZC 8.2, ex. 3 – 5 (multipla rötter till egenvärdesekvationen).

Variation-av-parametermetoden för lösning av allmänna linjära ODE-system
(ZC 8.3)

går ut på att man i ekvationen $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t)$
ansätter

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\,\boldsymbol{U}(t).$$

Man får (ZC sid 394 - 395),

$$\boldsymbol{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\,\boldsymbol{f}(t),$$

och som allmän lösning:

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\left(\boldsymbol{C} + \int_a^t \Phi^{-1}(s)\,\boldsymbol{f}(s)\,ds\right),$$

där $\boldsymbol{C}$ är en konstant vektor.
(Räkneexempel sid 395)

Med känt begynnelsevillkor $\boldsymbol{X}(a) = \boldsymbol{X}_0$ ger detta:

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(a)\boldsymbol{X}_0 + \Phi(t)\int_a^t \Phi^{-1}(s)\,\boldsymbol{f}(s)\,ds,$$

.