Institutionen för matematik
KTH
För Kursen 5B1209/5B1215:2

Liten formelsamling

Speciella funktioner

Språngfunktionen (Heavisides funktion)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

Signumfunktionen

$$\operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

Rektangelfunktionen

$$\operatorname{rect} t = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases}$$

Faltning

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

Allmännare

$$x(t) * \delta^{(n)}(t-a) = x^{(n)}(t-a)$$

Fourierserier och fourierintegraler

Fourierintegraler:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \qquad \text{(Syntesekvation)}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt, \qquad \text{(Analysekvation)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega \qquad \text{(Parsevals relation)}$$

L-periodiska fourierserier:

Komplex variant:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi j n t/L}. \qquad \text{(Syntesekvation)}$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{<L>} x(t)\, e^{-2\pi j n t/L}\, dt, \qquad \text{(Analysekvation)}$$

$<L>$ står för vilket som helst intervall av längd L.

$$\frac{1}{L} \int_{<L>} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \qquad \text{(Parsevals relation)}$$

Reell variant för reella $x(t)$:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n t/L) + b_n \sin(2\pi n t/L)).$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{<L>} x(t) \cos(2\pi n t/L)\, dt, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{<L>} x(t) \sin(2\pi n t/L)\, dt.$$

Samband mellan de komplexa och de reella koefficienterna ($n \geq 0$, $b_0 = 0$):

$$a_n = 2\, \mathrm{Re}\, c_n, \quad b_n = -2\, \mathrm{Im}\, c_n,$$

$$c_n = \frac{a_n - j b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + j b_n}{2}.$$

$$\frac{1}{L} \int_{<L>} |x(t)|^2\, dt = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \qquad \text{(Parsevals relation)}$$

Fouriertransformer

Allmänna egenskaper:

Funktion	Transform
Om $x(t)$	$Z(\omega)$
så $Z(t)$	$2\pi \cdot x(-\omega)$
$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}\, x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}\, X(\omega)$
$x(at),\ a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega\, X(\omega)$
$t\, x(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\left(\frac{d}{dt}\right)^n x(t)$	$(j\omega)^n X(\omega)$
$t^n x(t)$	$j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$
Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$2\pi/T$-periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(\omega)$
L-periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $2\pi/L \cdot X(\omega)$ med sampelavstånd $2\pi/L$

Speciella transformer

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)$	$e^{-j\omega t_0}+e^{j\omega t_0}=2\cos(\omega t_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\,(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$
$\delta(t-t_0)-\delta(t+t_0)$	$e^{-j\omega t_0}-e^{j\omega t_0}=2i\sin(\omega t_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-\pi j(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0))$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$2\pi/T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi n/T)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\mathrm{rect}\,(t/P)$	$P\,\mathrm{sinc}\,(P\omega/(2\pi))$
$\mathrm{sinc}\,(t/(2\pi))$	$2\pi\,\mathrm{rect}\,(\omega)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}\,(\omega/(2\pi))$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$

Funktioner med rationella transformer

Konstanten a förutsätts vara > 0

Funktion	Transform
$\delta^{(n)}(t)$	$(\mathrm{j}\omega)^n$
$\mathrm{e}^{-at}\,u(t)$	$\dfrac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$
$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}\ \operatorname{sign} t$	$\dfrac{\mathrm{j}}{a+\omega}$
$\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!}\,u(t)$	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{i}\omega)^n}$
$\mathrm{j}^n\,\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{(n-1)!}\ \operatorname{sign} t$	$\dfrac{1}{(a+\omega)^n}$
$\mathrm{e}^{-at}\,u(-t)$	$\dfrac{1}{a-\mathrm{j}\omega}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}\ \operatorname{sign} t$	$\dfrac{\mathrm{i}}{a-\omega}$
$\dfrac{(-t)^{n-1}\,\mathrm{e}^{at}}{(n-1)!}\,u(-t)$	$\dfrac{1}{(a-\mathrm{j}\omega)^n}$
$\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}}{\mathrm{j}^n(n-1)!}\ \operatorname{sign} t$	$\dfrac{1}{(a-\omega)^n}$
$\operatorname{sign} t$	$\dfrac{2}{\mathrm{i}\omega}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ \operatorname{sign} t$	$\dfrac{2}{(\mathrm{j}\omega)^n}$
$\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}\ \operatorname{sign} t$	$-\dfrac{2\mathrm{j}\omega}{a^2+\omega^2}$
$\sin at \operatorname{sign} t$	$\dfrac{2a}{a^2-\omega^2}$
$\cos at \operatorname{sign} t$	$\dfrac{2\mathrm{j}\omega}{a^2-\omega^2}$

Exempel:

a. Låt $x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{då } |t| < 1, \\ 0, & \text{då } |t| > 1. \end{cases}$ Beräkna dess fouriertransform.

Lösningskisser: En rättfram möjlighet är

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-1}^{0} (1 + t)\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{1} (1 - t)\, e^{-j\omega t}\, dt,$$

där integralerna sedan löses med hjälp av partiell integration.
En annan att man observerar (rita fig och kontrollera!) att

$$x''(t) = \delta(t + 1) - 2\delta(t) + \delta(t - 1),$$

samt att

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x''(t)\, \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2}\, dt,$$

(partialintegrera två gånger och notera att de utintegrerade termerna = 0, eftersom $x(t)\, e^{-j\omega t} \to 0$, då $t \to \pm\infty$.)
Man får sedan direkt att

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{(-j\omega)^2} \left\{ \left[e^{-j\omega t} \right]_{t=-1} - 2 \left[e^{-j\omega t} \right]_{t=0} + \left[e^{-j\omega t} \right]_{t=1} \right\}$$

$$= -\frac{1}{\omega^2} \{ e^{jt} - 2 + e^{-jt} \} = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega).$$

Detta om $\omega \neq 0$. För $\omega = 0$; $X(0) = \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\, dt = 1,$ ■

b. Bestäm den komplexa och den reella fourierserieutvecklingen av den 3-periodiska fortsättningen av funktionen $x(t)$ ovan.
Lösningsskiss: Analysekvationen för fourierserier ger de komplexa koefficienterna

$$c_n = \frac{1}{3} \int_{-3/2}^{3/2} x(t)\, e^{-2\pi j n t/3}\, dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} x(t)\, e^{-2\pi j n t/3}\, dt = \frac{1}{3} X(2\pi n/3) =$$

$$= [\text{Enligt ovan}] = \frac{3}{2\pi^2 n^2} (1 - \cos(2\pi n/3)),\ n \neq 0,\ c_0 = \frac{1}{3}.$$

Också den reella utvecklingens koefficienter kan avläsas här:

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n = \frac{3}{\pi^2 n^2} (1 - \cos(2\pi n/3)),\ n > 1,\ a_0 = \frac{2}{3},$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im} c_n = 0.$$

Extra övningar om fourierserier och -integraler

1. Låt $x(t) = \sin 2t + 3 \cos 4t$

a. Verifiera att funktionen är 2π-periodisk och utveckla den i reell respektive komplex 2π-periodisk fourierserie.

b. Verifiera att funktionen också är π-periodisk och utveckla den i reell respektive komplex π-periodisk fourierserie.

2. Låt $x(t) = t\,\delta(t - 3) + (\sin \pi t)\,\delta(t - 1/6)$.

a. Bestäm fouriertransformen till $x(t)$.

b. Låt $y(t)$ vara den 4-periodiska fortsättningen av funktionen $x(t)$. Bestäm y:s komplexa fourierseriekoefficienter.

3. Den 3-periodiska generaliserade funktionen $x(t)$ har de komplexa fourierseriekoefficienterna $c_n = 1 - (-1)^n$. Bestäm $x(t)$.

4. **a.** Bestäm c_n så att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt} = e^t \text{ i intervallet } -\pi < t < \pi.$$

b. Bestäm a_n och b_n så att

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = e^t \text{ i intervallet } -\pi < t < \pi$$

5. **a.** Beräkna fouriertransformen till

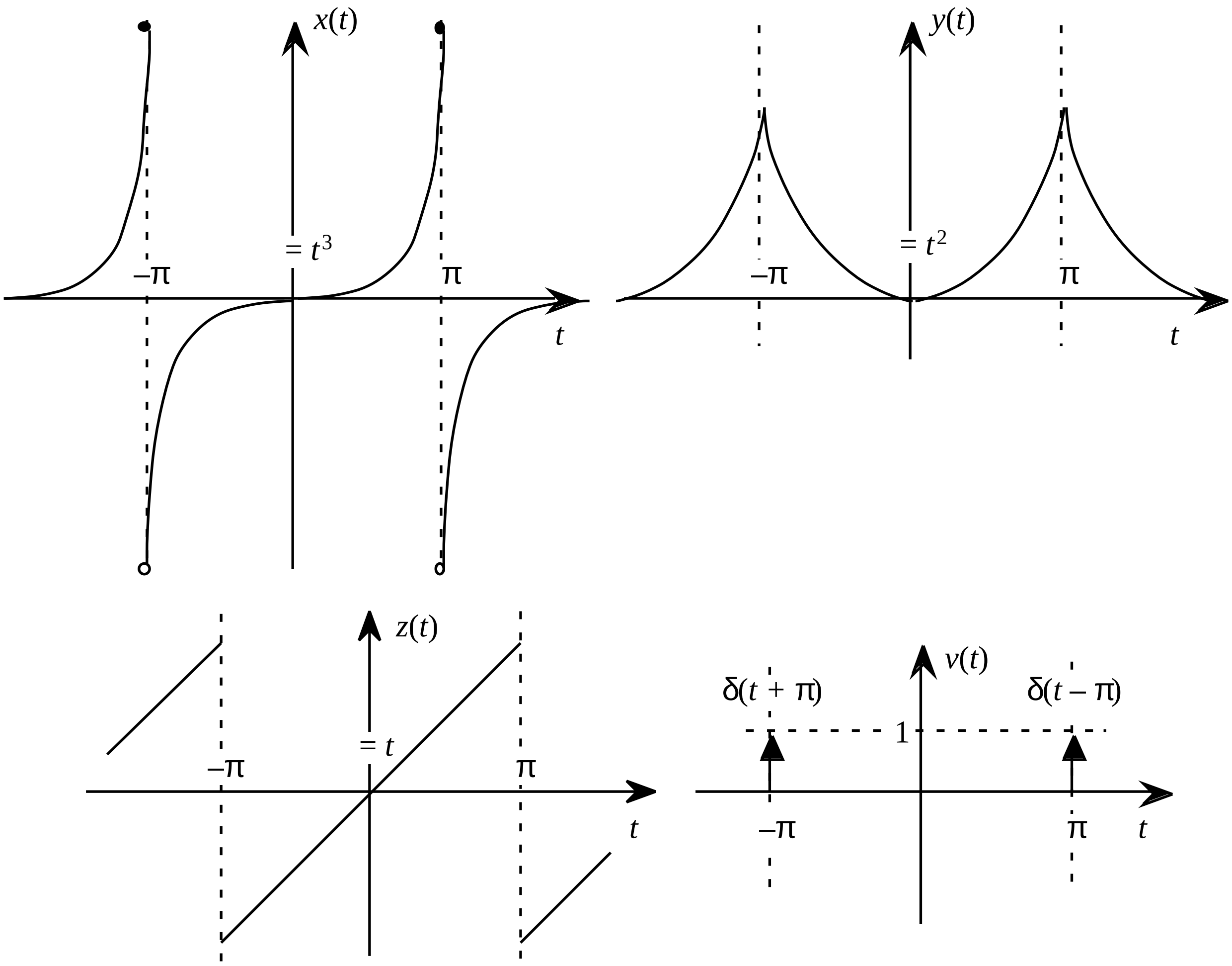
$$x(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{då } |t| < 1, \\ 0, & \text{då } 1 < |t|. \end{cases}$$

b. Bestäm de komplexa och de reella fourierseriekoefficienterna till $y(t)$, den 2π-periodiska fortsättningen av $x(t)$.

c. Bestäm de komplexa och de reella fourierseriekoefficienterna till $z(t)$, den 2-periodiska fortsättningen av $x(t)$.

d. Skissera graferna för $y(t)$ och för $z(t)$.

6. Låt $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ och $v(t)$ vara 2π-periodiska funktioner. Deras grafer framgår av följande figurer:



a. Vilka samband finns mellan $x'(t)$, $y(t)$ och $v(t)$, mellan $y'(t)$ och $z(t)$ och mellan $z'(t)$ och $v(t)$?

b. Vilka samband finns mellan de komplexa fourierseriekoefficienterna a_n, b_n, c_n och d_n, $n \neq 0$, för respektive funktioner?

c. Använd resultatet i b. för att skriva upp FS-koefficienterna till $x(t)$.

7. Låt $$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cdot \cos at \quad \text{(Rita!)}$$

a. Verifiera att $x''(t) + a^2 x(t) = (a \sin a\pi) \cdot (\delta(t - \pi) + \delta(t + \pi))$.

b. Bestäm koefficienterna i den komplexa fourierserieutvecklingen av den 2π-periodiska fortsättningen av $x(t)$ för de fall då a inte är något heltal.

c. Vilka är koefficienterna då a är ett heltal?

8. Beräkna fouriertransformerna till följande signaler:

a. $\mathrm{rect}(2t - 1)$,
b. $e^{-|t|} \cos 2t$,
c. $t\, \mathrm{rect}\, t$,
d. $\sin t \cdot \mathrm{rect}\, t$,
e. $t \cdot \mathrm{sinc}\, t$,
f. $\cos t \cdot \mathrm{sinc}\, t$,
g. $\mathrm{sinc}\, t * \mathrm{sinc}\, t$.

9, Ur tabell har vi att fouriertranssformen av e^{-at^2} är $\sqrt{\pi/a} \cdot e^{-\omega^2/(4a)}$ $(a > 0)$.
Berstäm fouriertransformerna till:

a. $2t\, e^{-t^2}$,

b. $e^{-t^2} \cdot e^{-t^2}$,

c. $e^{-t^2} * e^{-t^2}$.

Svar:

1a. $a_4 = 3$, $b_2 = 1$, övriga a- och b-koefficienter = 0,
$c_2 = -\frac{j}{2}$, $c_{-2} = \frac{j}{2}$, $c_4 = c_{-4} = \frac{3}{2}$, övriga $c_n = 0$.

1b. $a_2 = 3$, $b_1 = 1$, övriga a- och b-koefficienter = 0,
$c_1 = -\frac{j}{2}$, $c_{-1} = \frac{j}{2}$, $c_2 = c_{-2} = \frac{3}{2}$, övriga $c_n = 0$.
(*Ledning*: Använd Eulers formler och syntesekvationen.)

2a. $X(\omega) = 3\, e^{-3j\omega} + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega/6}$. (*Ledning*: Förenkla först funktionen.)

2b. $c_n = \frac{3}{4}(-j)^n + \frac{1}{8}\, e^{\pi j n/12}$. $\left(\text{Obs att } c_n = \frac{1}{4}\, X\left(\frac{2\pi n}{4}\right).\right)$

3. $$x(t) = 3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\, \delta(t - 3n/2)$$

(*Ledning*: Syntesekvationen ger $x(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j(2n+1)t/3} = 2e^{2\pi j t/3} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n\,(2t/3)}$,
använd sedan identiteten $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n t/L} = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL)$ och att $y(t)\,\delta(t-a) = y(a)\,\delta(t-a)$.)

5a. $c_n = (-1)^n \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(1 - jn)}$

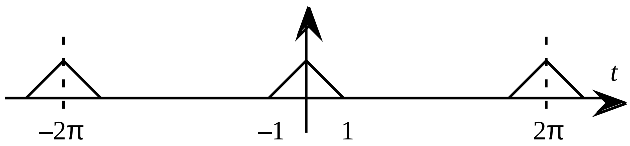
4b. $a_n = (-1)^n \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \dfrac{1}{1+n^2}$, $b_n = (-1)^{n+1} \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \dfrac{n}{1+n^2}$

5a. $\dfrac{4}{\omega^3}(\sin\omega - \omega\cos\omega)$, då $\omega \neq 0$, $= \dfrac{4}{3}$, då $\omega = 0$.

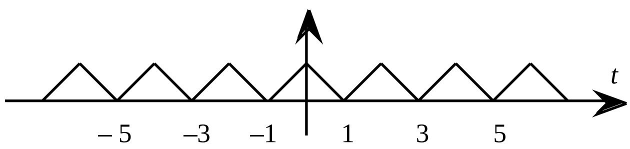
5b. $c_n = \dfrac{2}{\pi n^3}\sin n - \dfrac{2}{\pi n^2}\cos n$, $(n \neq 0)$. $c_0 = \dfrac{2}{3\pi}$;
$a_n = \dfrac{4}{\pi n^3}\sin n - \dfrac{4}{\pi n^2}\cos n$, $(n \geq 1)$. $a_0 = \dfrac{4}{3\pi}$; $b_n = 0$.

5c. $c_n = \dfrac{2}{\pi^2 n^2}(-1)^{n+1}$, $(n \neq 0)$. $c_0 = \dfrac{2}{3}$;
$a_n = \dfrac{4}{\pi^2 n^2}(-1)^{n+1}$, $(n \geq 1)$. $a_0 = \dfrac{4}{3}$; $b_n = 0$.

5d.



2π-periodisk fortsättning



2-periodisk fortsättning

6a. $x'(t) = 3y(t) - 2\pi^3 v(t)$, $y'(t) = 2z(t)$, $z'(t) = 1 - 2\pi v(t)$.

6b. För $n \neq 0$: $jn\, a_n = 3b_n - 2\pi^3 d_n$, $jn\, b_n = 2c_n$, $jn\, c_n = -2\pi d_n$.

6c. $2\pi d_n = (-1)^n$ $\quad a_n = j\dfrac{(-1)^n}{n^3}(\pi^2 n^2 - 6)$ för $n \neq 0$. $x(t)$ udda funktion $\quad a_0 = 0$.

7b. $c_n = (-1)^n \dfrac{a \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)}$

7c. Om $a = N$: $c_N = c_{-N} = \dfrac{1}{2}$, övriga $c_n = 0$.

(Obs att den 2π-periodiska fortsättningen $= \cos Nt$)

8a. $1/2 \operatorname{sinc}(\omega/(4\pi)) \cdot e^{-j\omega/2}$

8b. $1/(1+(\omega - 2)^2) + 1/(1+(\omega + 2)^2)$

8c. $j[\omega \cos(\omega/2) - 2 \sin \omega/2)]/\omega^2$

8d. $j/2 \cdot [\operatorname{sinc}((\omega + 1)/(2\pi)) - \operatorname{sinc}((\omega - 1)/(2\pi))]$

8e. $j[\delta(\omega + \pi) - \delta(\omega - \pi)]$

8f. $1/2 \cdot [\operatorname{rect}((\omega + 1)/(2\pi)) + \operatorname{rect}((\omega - 1)/(2\pi))]$

8g, $\operatorname{rect} \omega/(2\pi)$

9a. $-\sqrt{\pi} \cdot j\omega \cdot e^{-\omega^2/4}$

9b. $\sqrt{\pi/2} \cdot e^{-\omega^2/8}$

9c. $\pi\, e^{-\omega^2/2}$