Fourierserier för *P*-periodiska funktioner

Generellt:

Syntessekvationen, komplex variant:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, e^{2\pi j n t/P}.$$

Analysekvationen, komplex variant:

$$a_n = \frac{1}{P} \int_{<P>} x(t) \, e^{-2\pi j n t/P} \, dt,$$

$<P>$ står för vilket som helst intervall av längd P.

För *reella* $x(t)$ har man som alternativ:

Syntessekvationen, reell variant:

$$x(t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \cos(2\pi n t/P) + v_n \sin(2\pi n t/P)).$$

Analysekvationen, reell variant:

$$u_n = \frac{2}{P} \int_{<P>} x(t) \cos(2\pi n t/P) \, dt, \quad v_n = \frac{2}{P} \int_{<P>} x(t) \sin(2\pi n t/P) \, dt.$$

Samband mellan de komplexa och de reella koefficienterna ($n \geq 0$, $v_0 = 0$):

$$u_n = \mathrm{Re}\,(2a_n), \; v_n = -\,\mathrm{Im}\,(2a_n),$$

$$a_n = \frac{u_n - jv_n}{2}, \; a_{-n} = \frac{u_n + jv_n}{2},$$

Exempel:

Om $x(t)$ är den 3-periodiska fortsättningen av $\begin{cases} 1, & \text{då } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{då } 1 < t < 3, \end{cases}$ så är dess komplexa fourierserie-koefficienter:

$$a_n = \frac{1}{3} \int_0^3 x(t) \, e^{-2\pi j n t/3} \, dt = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-2\pi j n t/3} \, dt = [\text{Om } n \neq 0] = \frac{1}{3} \left[\frac{e^{-2\pi j n t/3}}{-2\pi j n/3} \right]_{t=0}^{1} = \frac{1 - e^{-2\pi j n/3}}{2\pi j n},$$

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_0^1 1 \, dt = \frac{1}{3},$$

varav också de reella kan avläsas:

$$u_n = 2\,\mathrm{Re}\, a_n = 2 \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n/3) \;\; (\text{då } n = 0) \text{ och } u_0 = \frac{2}{3}$$

samt

$$v_n = -2\,\mathrm{Im}\, a_n = 2 \frac{1}{2\pi n} (1 - \cos(2\pi n/3)).$$

Alternativt kan de reella koefficineterna integreras fram med hjälp av de reella formlerna ovan :

$$u_n = \frac{2}{3}\int_0^1 1\cdot\cos(2\pi nt/3)\,dt = [\text{Om } n \geq 1] = \frac{2}{3}\left[\frac{\sin(2\pi nt/3)}{2\pi n/3}\right]_{t=0}^{1} = 2\,\frac{\sin(2\pi nt/3)}{2\pi n},$$

$$u_0 = = \frac{2}{3}\int_0^1 1\cdot 1\,dt = \frac{2}{3}$$

samt

$$v_n = \frac{2}{3}\int_0^1 1\cdot\sin(2\pi nt/3)\,dt = [\text{Om } n \geq 1] = \frac{2}{3}\left[\frac{-\cos(2\pi nt/3)}{2\pi n/3}\right]_{t=0}^{1} = 2\,\frac{1-\cos(2\pi nt/3)}{2\pi n}.$$

Extra övningar om fourierserier

1. Låt $x(t) = \sin 2t + 3\cos 4t$

a. Verifiera att funktionen är 2π-periodisk och utveckla den i komplex respektive reell 2π-periodisk fourierserie.

b. Verifiera att funktionen också är π-periodisk ochutveckla den i komplex respektive reell π-periodisk fourierserie.

2. Bestäm de komplexa fourierseriekoefficienterna till den 4-periodiska fortsättningen av

$$x(t) = t\,\delta(t-3) + (\sin \pi t)\,\delta(t-1/6)$$

3. Den 3-periodiska funktionen $x(t)$ har de komplexa fourierseriekoefficienterna $a_n = 0$ om n jämnt och $= 1$ om n udda. Bestäm $x(t)$.

4. Bestäm de komplexa och de reella fourierseriekoefficienterna till den 2π-periodiska fortsättningen av

a. $x(t) = \mathrm{rect}_{2\pi}(t)\cdot\cos 2t$ (Rita!)

b. $y(t) = \mathrm{rect}_{2\pi}(t)\cdot\mathrm{sign}(t)\cdot\cos 2t$ (Rita!)

5. **a.** Bestäm a_n så att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jnt} = e^t \text{ i intervallet } -\pi < t < \pi.$$

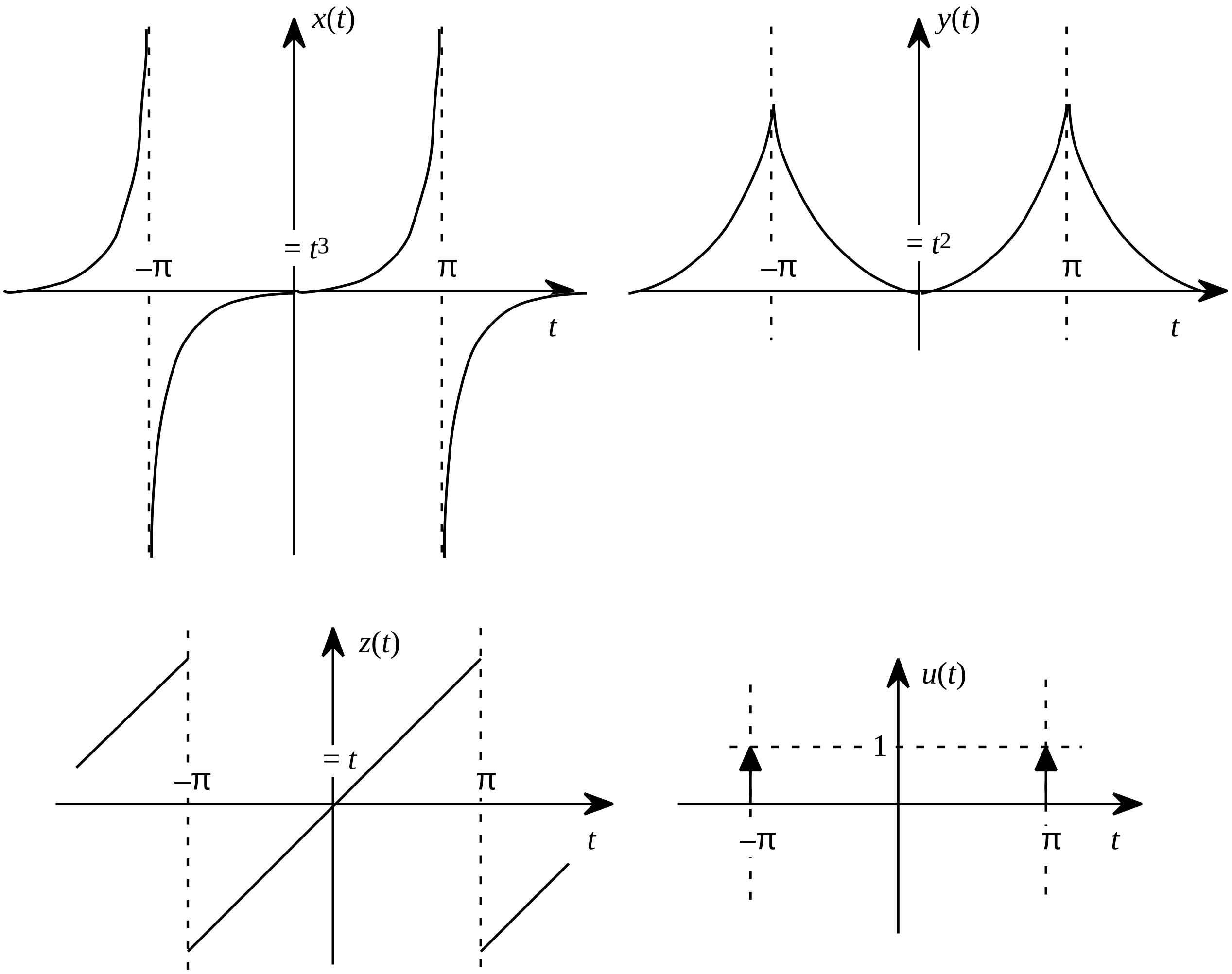
b. Bestäm u_n och v_n så att

$$\frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \cos nt + v_n \sin nt) = e^t \text{ i intervallet } -\pi < t < \pi$$

6. Bestäm de komplexa och de reella fourierseriekoefficienterna till den 2π-periodiska fortsättningen av

$$x(t) = \begin{cases} 1-t^2, & \text{då } |t| < 1, \\ 0, & \text{då } 1 < |t|. \end{cases}$$

7. Låt $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ och $u(t)$ vara 2π-periodiska funktioner med följande grafer:



a. Vilka samband finns mellan $x'(t)$ och $y(t)$, $y'(t)$ och $z(t)$ respektive $z'(t)$ och $u(t)$?

b. Vilka samband finns mellan FS-koefficienterna a_n, b_n, c_n och d_n, $n \neq 0$, för respektive funktioner?

c. Använd resultatet i b. för att skriva upp FS-koefficienterna till $x(t)$.

Svar:

1a. $u_4 = 3$, $v_2 = 1$, övriga u- och v-koefficienter = 0,
$a_2 = \frac{1}{2\mathrm{j}}$, $a_{-2} = -\frac{1}{2\mathrm{j}}$, $a_4 = a_{-4} = \frac{3}{2}$, övriga $a_n = 0$.

1b. $u_2 = 3$, $v_1 = 1$, övriga u- och v-koefficienter = 0,
$a_1 = \frac{1}{2\mathrm{j}}$, $a_{-1} = -\frac{1}{2\mathrm{j}}$, $a_2 = a_{-2} = \frac{3}{2}$, övriga $a_n = 0$.
(*Ledning*: Använd Eulers formler och syntesekvationen.)

2. $a_n = \frac{3}{4}(-\mathrm{j})^n + \frac{1}{8}e^{\pi \mathrm{j} n/12}$.

3. $x(t) = \frac{3}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,\delta(t - 3n/2)$

(*Ledning*: Använd syntesekvationen och identiteten $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi \mathrm{j} nt/P} = P\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nP)$.)

4a. $a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$, övriga $a_n = 0$.
$u_2 = 1$, övriga u_n och alla $v_n = 0$

4b. $a_n = \frac{-2\mathrm{j}n}{\pi(n^2 - 4)}$ om n är udda och = 0 om n är jämnt,
$u_n = 0$; $v_n = \frac{4n}{\pi(n^2 - 4)}$ om n är udda och = 0 om n är jämnt

5a. $a_n = (-1)^n\,\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(1 - \mathrm{j}n)}$

5b. $u_n = (-1)^n\,\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\,\frac{1}{1+n^2}$, $v_n = (-1)^{n+1}\,\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\,\frac{n}{1+n^2}$

6. $a_n = \frac{2}{\pi n^3}\sin n - \frac{2}{\pi n^2}\cos n$, $(n \neq 0)$. $a_0 = \frac{1}{3\pi}$;
$u_n = \frac{4}{\pi n^3}\sin n - \frac{4}{\pi n^2}\cos n$, $(n \geq 1)$. $u_0 = \frac{2}{3\pi}$; $v_n = 0$.

7a. $x'(t) = 3y(t) - 2\pi^3 u(t)$, $y'(t) = 2z(t)$, $z'(t) = 1 - 2\pi u(t)$.

7b. För $n \neq 0$: $\mathrm{j}n\,a_n = 3b_n - 2\pi^3 d_n$, $\mathrm{j}n\,b_n = 2c_n$, $\mathrm{j}n\,c_n = -2\pi d_n$.

7c. $2\pi d_n = (-1)^n$ $a_n = \mathrm{j}\frac{(-1)^n}{n^3}(\pi^2 n^2 - 6)$ för $n \neq 0$. $x(t)$ udda funktion $a_0 = 0$.