Institutionen för matematik
KTH
080331

Kompletterande formelblad för kursen SF1634

1. Speciella funktioner

Språngfunktionen (Heavisides funktion) $\quad \mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$

Signumfunktionen $\quad \operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$

Rektangelfunktionen $\quad \operatorname{rect} t = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases}$

Sinus cardinalis (”Sincen”) $\quad \operatorname{sinc} t = \begin{cases} (\sin \pi t)/(\pi t), & \text{om } t \neq 0, \\ 1, & \text{om } t = 0. \end{cases}$

δ-*funktionen*:

$$\left.\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t \neq 0, \\ \text{odefinierad}, & \text{om } t = 0 \end{cases}\right\} \text{ och } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = 1 \text{ för alla konstanta } a.$$

Om $x(t)$ är kontinuerlig för $t = a$:

$$x(t)\cdot\delta(t-a) = x(a)\cdot\delta(t-a),$$

Skalning:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \text{ om } a \neq 0.$$

2. Generaliserad derivering

Om $x(t)$ är en sträckvis deriverbar funktion med språngdiskontinuiteter $d_1, d_2, \ldots$ i punkterna $a_1, a_2, \ldots$, dvs. $d_i = x(a_i+) - x(a_i-)$, så är

$$x'(t) = \{x'(t)\} + d_1\delta(t-a_1) + d_2\delta(t-a_2) + \ldots$$

($x'(t)$ är den generaliserade derivatan, $\{x'(t)\}$ den klassiska).
Speciellt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|t| = \operatorname{sign} t,\ \ \mathrm{u}'(t) = \delta(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sign}(t) = 2\delta(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{rect}(t) = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2).$$

Derivering av δ-*pulser*:

Om $x'(t)$ kontinuerlig i $t = a$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta'(t-a)\,\mathrm{d}t = -x'(a)$; $\ x(t)\,\delta'(t-a) = x(a)\,\delta'(x-a) - x'(a)\,\delta(x-a)$.

Om $x^{(n)}(t)$ kontinuerlig i $t = a$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta^{(n)}(t-a)\,\mathrm{d}t = (-1)^n x^{(n)}(a)$

3. Periodicitet

P-periodicitet, ($P > 0$):

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodisk} \Leftrightarrow x(t+P) = x(t) \text{ för alla } t.$$

P-periodisk fortsättning:

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodiska fortsättningen av } y(t) \Leftrightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-nP).$$

4. Faltning

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) * (a\, y(t)) = a\,(x(t) * y(t)), \qquad x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t), \qquad (x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$$

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a), \qquad x(t) * \delta^{(n)}(t-a) = x^{(n)}(t-a)$$

5. Komplex fourierserieutveckling av *P*-periodiska funktioner:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi i n t/P}, \quad \text{(Syntesekvationen)}$$

$$\text{där } c_n = \frac{1}{P}\int_P x(\tau)\, e^{-2\pi i n \tau/P}\, d\tau. \quad \text{(Analysekvationen)}$$

Samband med reell serieutveckling för reella $x(t)$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n t/P + b_n \sin 2\pi n t/P),$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \text{ om } n \ge 1 \text{ och } = \frac{1}{2}(a_{-n} + i b_{-n}) \text{ om } n \le -1 \text{ samt } = \frac{a_0}{2} \text{ om } n = 0,$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, \text{ då } n \ge 0, \text{ och } b_n = -2 \operatorname{Im} c_n, \text{ då } n \ge 1.$$

Funktionsnorm $$\|x(t)\| = \left(\int_P |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

Totalenergi (under 1 period): $$\|x(t)\|^2 = \int_P |x(t)|^2\, dt.$$

Medeleffekt $$\frac{1}{P}\int_P |x(t)|^2\, dt.$$

Parsevals relation $$\frac{1}{P}\int_P |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Enhetspulståg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nP) = \frac{1}{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t/P},$$

6. Fouriertransformen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad \text{(Syntesekvationen)}$$

$$\text{där } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{(Analysekvationen)}$$

Funktionsnorm $$\|x(t)\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

Totalenergi $$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt.$$

Parsevals relation $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega.$$

Samband mellan fourierserier och -transformer

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nP) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi j nt/P} \Leftrightarrow c_n = \frac{1}{P}\, Y\!\left(\frac{2\pi n}{P}\right)$$

Fouriertransformer i tabellform

Allmänna egenskaper:

$\omega = 2\pi f$

Funktion	Transform
Om $x(t)$	$Z(\omega)$
så $Z(t)$	$2\pi x(-\omega)$
$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}\, x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}\, X(\omega)$
$x(at),\ a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$(x * y)(t)$	$X(\omega)\cdot Y(\omega)$
$x(t)\cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$i\omega X(\omega)$
$t\, x(t)$	$i \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\left(\frac{d}{dt}\right)^n x(t)$	$(i\omega)^n X(\omega)$
$t^n x(t)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$
Sampling av $x(t)$ med sampel-avstånd T	$2\pi/T$-periodisk fort-sättning av $1/T \cdot X(\omega)$
L-periodisk fort-sättning av $x(t)$	Sampling av $2\pi/L \cdot X(\omega)$ med sampelavstånd $2\pi/L$

Speciella transformer

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$
$\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$	$e^{-i\omega t_0} + e^{i\omega t_0} = 2\cos(\omega t_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)$	$e^{-i\omega t_0} - e^{i\omega t_0} = -2i\sin(\omega t_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-\pi i\,(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$2\pi/T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$
$u(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\,\delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$
$\mathrm{rect}(t/P)$	$P\,\mathrm{sinc}(P\omega/(2\pi))$
$\mathrm{sinc}(t/(2\pi))$	$2\pi\,\mathrm{rect}(\omega)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}(\omega/(2\pi))$

Funktioner med rationella transformer

Konstanten a förutsätts vara > 0

$$\omega = 2\pi f$$

Funktion	Transform
$\delta^{(n)}(t)$	$(\mathrm{i}\omega)^n$
$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{a+\mathrm{i}\omega}$
$e^{-\mathrm{i}at}$ sign t	$-\dfrac{2\mathrm{i}}{a+\ \omega}$
$\dfrac{t^{n-1}\ e^{-at}}{(n-1)!}\ u(t)$	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{i}\omega)^n}$
$\mathrm{i}^n\,\dfrac{t^{n-1}\ e^{-\mathrm{i}at}}{(n-1)!}$ sign t	$\dfrac{2}{(a+\ \omega)^n}$
$e^{at}u(-t)$	$\dfrac{1}{a-\mathrm{i}\omega}$
$e^{\mathrm{i}at}$ sign t	$\dfrac{2\mathrm{i}}{a-\omega}$
$\dfrac{(-t)^{n-1}\ e^{at}}{(n-1)!}\ u(-t)$	$\dfrac{1}{(a-\mathrm{i}\omega)^n}$
$\dfrac{t^{n-1}\ e^{\mathrm{i}at}}{\mathrm{i}^n(n-1)!}$ sign t	$\dfrac{2}{(a-\omega)^n}$
sign t	$\dfrac{2}{\mathrm{i}\omega}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ sign t	$\dfrac{2}{(\mathrm{i}\omega)^n}$
$e^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{-a\|t\|}$ sign t	$-\dfrac{2\mathrm{i}\omega}{a^2+\omega^2}$
sin at sign t	$\dfrac{2a}{a^2-\omega^2}$
cos at sign t	$\dfrac{2\mathrm{i}\omega}{a^2-\omega^2}$

LTI-system

Definierande egenskaper:

1° *(Linjaritet)*

Om en insignal $z(t)$ är en linjär kombination av två insignaler $x(t)$ och $y(t)$,

$$z(t) = ax(t) + by(t),\ a \text{ och } b \text{ konstanter},$$

så är utsignalen $z_L(t)$ samma linjära kombination av $x_L(t)$ och $y_L(t)$:

$$z_L(t) = ax_L(t) + by_L t)$$

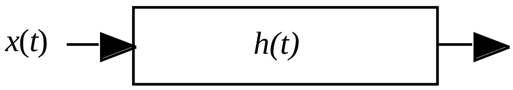
2° *(Tidsinvarians)*

Om insignalen förskjuts i tiden, dvs. om $x(t)$ ersätts med $x(t-\alpha)$, där α är en reell konstant,[1] så kommer också utsignalen att förskjutas lika mycket i tiden:

$$y(t) = x(t-\alpha) \qquad y_L(t) = x_L(t-\alpha)$$

Pulssvar:

Utsignal/faltning:



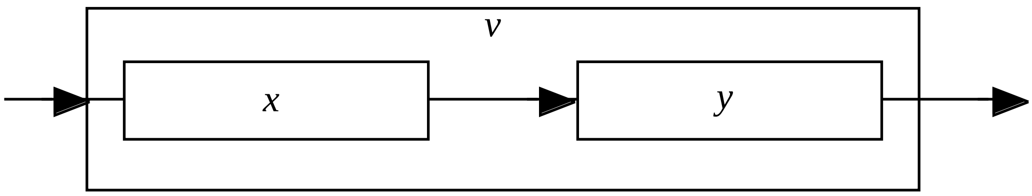
$$x_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = h(t) * x(t),$$

och för fouriertransformerna: $\qquad X_L(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$

Harmoniska svängningar som insignal:

$X(\omega)$ = Fouriertransformen av $x(t)$

Seriekoppling av LTI-system:



$$v(t) = x(t) * y(t)$$

och för fouriertransformerna: $\qquad V(\omega) = X(\omega)\cdot Y(\omega)$

1 $\quad x(t-\alpha)$ är samma signal som $x(t)$ fast avsänd α tidsenheter senare (om $\alpha > 0$).