Institutionen för matematik
KTH
För Kursen 5B1209/5B1215:2

Liten formelsamling

Speciella funktioner

Språngfunktionen (Heavisides funktion)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

Signumfunktionen

$$\operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

Rektangelfunktionen

$$\operatorname{rect} t = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases}$$

Sinus cardinalis

$$\operatorname{sinc} t = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}, & \text{om } t \neq 0, \\ 1, & \text{om } t = 0. \end{cases}$$

Faltning

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

Allmännare

$$x(t) * \delta^{(n)}(t-a) = x^{(n)}(t-a)$$

051017

Fourierserier och fourierintegraler

Fourierintegraler:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \qquad \text{(Syntesekvation)}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt, \qquad \text{(Analysekvation)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega \qquad \text{(Parsevals relation)}$$

L-periodiska fourierserier:

Komplex variant:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi j n t/L}. \qquad \text{(Syntesekvation)}$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{<L>} x(t)\, e^{-2\pi j n t/L}\, dt, \qquad \text{(Analysekvation)}$$

<L> står för vilket som helst intervall av längd L.

$$\frac{1}{L} \int_{<L>} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \qquad \text{(Parsevals relation)}$$

Reell variant för reella $x(t)$:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(2\pi n t/L) + b_n \sin(2\pi n t/L)\right).$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{<L>} x(t) \cos(2\pi n t/L)\, dt, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{<L>} x(t) \sin(2\pi n t/L)\, dt.$$

Samband mellan de komplexa och de reella koefficienterna ($n \geq 0$, $b_0 = 0$):

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\, c_n, \quad b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n,$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}.$$

$$\frac{1}{L} \int_{<L>} |x(t)|^2\, dt = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \qquad \text{(Parsevals relation)}$$

Fouriertransformer

Allmänna egenskaper:

Funktion	Transform
Om $x(t)$	$Z(\omega)$
så $Z(t)$	$2\pi \cdot x(-\omega)$
$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}\, x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}\, X(\omega)$
$x(at)$, $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega\, X(\omega)$
$t\, x(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\left(\frac{d}{dt}\right)^n x(t)$	$(j\omega)^n X(\omega)$
$t^n x(t)$	$j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$
Sampling av $x(t)$ med sampel-avstånd T	$2\pi/T$-periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(\omega)$
L-periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $2\pi/L \cdot X(\omega)$ med sampelavstånd $2\pi/L$

Speciella transformer

$\omega = 2\pi f$

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\, \delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\, \delta(\omega - \omega_0)$
$\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$	$e^{-j\omega t_0} + e^{j\omega t_0} = 2\cos(\omega t_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right)$
$\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)$	$e^{-j\omega t_0} - e^{j\omega t_0} = -2j\sin(\omega t_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-\pi j\left(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$2\pi/T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\mathrm{rect}(t/P)$	$P\, \mathrm{sinc}(P\omega/(2\pi))$
$\mathrm{sinc}(t/(2\pi))$	$2\pi\, \mathrm{rect}(\omega)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}(\omega/(2\pi))$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$

Funktioner med rationella transformer

Konstanten a förutsätts vara > 0

Funktion	Transform
$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
$e^{-at}\,u(t)$	$\dfrac{1}{a + j\omega}$
e^{-jat} sign t	$\dfrac{j}{a + \omega}$
$\dfrac{t^{n-1}\,e^{-at}}{(n-1)!}\,u(t)$	$\dfrac{1}{(a + j\omega)^n}$
$j^n\,\dfrac{t^{n-1}\,e^{-jat}}{(n-1)!}$ sign t	$\dfrac{1}{(a + \omega)^n}$
$e^{-at}\,u(-t)$	$\dfrac{1}{a - j\omega}$
e^{jat} sign t	$\dfrac{j}{a - \omega}$
$\dfrac{(-t)^{n-1}\,e^{at}}{(n-1)!}\,u(-t)$	$\dfrac{1}{(a - j\omega)^n}$
$\dfrac{t^{n-1}\,e^{jat}}{j^n(n-1)!}$ sign t	$\dfrac{1}{(a - \omega)^n}$
sign t	$\dfrac{2}{j\omega}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ sign t	$\dfrac{2}{(j\omega)^n}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$ sign t	$-\dfrac{2j\omega}{a^2 + \omega^2}$
sin at sign t	$\dfrac{2a}{a^2 - \omega^2}$
cos at sign t	$\dfrac{2j\omega}{a^2 - \omega^2}$