

Institutionen för matematik
KTH

Fouriermetoder för

T2

VT2007

Innehåll

1. Inledning.....	1
1.1 Fourierserier och -integraler inom signalteorin. Komplexa fourierserier.....	1
1.2 Litet om fel.....	6
1.3 Om ortogonalitet. Parsevals relation.....	8
1.4 Orientering om linjära tidsinvarianta system och fouriertransformer.....	12
Övningar till kap 1.....	15
2. Geometriskt om grafer.....	18
Övningar till kapitel 2.....	21
3. Om periodiska funktioner och periodisk fortsättning.....	22
Övningar till kapitel 3.....	23
4. Om matematisk beskrivning av signaler.....	25
4.1. Informell inledning. -funktioner och generaliserade funktioner.....	25
4.2 Egenskaper hos generaliserade funktioner och hur man räknar med dem.....	27
4.2.1. Integration av -pulser.....	27
4.2.2. Multiplikation med -pulser.....	28
4.2.3. Linjaritet vid integration.....	29
4.2.4. -funktionen och LTI-system.....	29
4.2.5. Likhet mellan generaliserade funktioner. Skalning av -funktionen.....	30
4.2.6. Generaliserad derivering av funktioner.....	31
4.2.7. Derivering av -pulser.....	33
Övningar till kap. 4.....	36
5. Några viktiga summations- och integrationsformler.....	38
5.1. Geometriskt serier.....	38
5.2. Summation av harmoniska vågor ($e^{i t}$ -funktioner), pulståg.....	38
5.2.1. En kommentar till vissa variabelval.....	38
5.2.2. Summation av harmoniska funktioner.....	38
5.3. Regelbunden sampling multiplikation med pulståg.....	41
5.4. Periodisk fortsättning faltning med pulståg.....	42
Övningar till kapitel 5.....	43
6. Fourierserier och fourierutveckling.....	45
6.1. Syntes- och analysekvationerna för fourierserier.....	45
6.2. Egenskaper hos fourierserietransformen.....	47
6.3. Konvergensfrågor.....	49
Övningar till kapitel 6.....	50
7. Fouriertransformen.....	53
7.1. Informella härledningar av syntes- och analysekvationerna för fouriertransformen.....	53
7.1.1. Approximation av ”godtycklig” funktion med periodiska funktioner.....	53
7.1.2. Härledning med hjälp av -funktionen.....	56
7.2. Mer om faltning och fouriertransform.....	59
7.3. Transformens egenskaper.....	61
(a) Dualitet.....	61
(b) -pulser Konstanter.....	63

(c) Förskjutning	Multiplikation med harmonisk svängning.....	63
(d) Skalning med faktor a	Skalning med faktor $1/a$	64
(e) Pulståg	Pulståg.....	64
(f) rect	sinc.....	65
(g) Steg- och Signumfunktionerna.....		65
(h) Multiplikation	Faltning.....	66
(i) Derivering	Multiplikation med variabel.....	66
(j) Funktioner med rationella fouriertransformer.....		67
(k) Transform av primitiv funktion.....		69
(l) Sampling med sampelavstånd T	$(1/T)$ -periodisk fortsättning.....	69
7.4. Fourierserierna som specialfall av fouriertransformen.....		70
7.5. Parsevals relation för fouriertransformer.....		71
7.6. Litet om approximation av fouriertransformer, en orientering.....		72
8. Svar till övningarna.....		81
9. Liten formelsamling.....		93
Register.....		99

Fouriermetoder för T2

Syftet med det här kursavsnittet är att ge en orientering av en del i den matematiska analysen, de s.k. *fouriermetoderna*, som har visat sig vara mycket användbara och kraftfulla redskap för att modellera situationer inom signalbehandling, elektricitetslära, akustik m.m.

Fourieranalysen är i sig ganska komplex. Den har en egen begreppsapparat och i den finns många icke-triviala samband. Detta gör dels, att den matematisk/logiska delen av teorin inte är alldeles enkel om den bedrivs med vetenskaplig noggrannhet dels, att man kan närma sig ämnet på många olika sätt.

Här följer en informell framställning – syftet är att man i första hand skall kunna förstå att de resultat som ges är rimliga och kunna använda dem i naturvetenskapliga och tekniska sammanhang. Mera stringenta framställningar hittar man i speciallitteraturen.

1. Inledning

1.1 Fourierserier och -integraler inom signalteorin. Komplexa fourierserier.

Litet ytligt kan man säga att fourieranalysen i mycket handlar om konsten att uppfatta godtyckliga funktioner $x(t)$ som ”linjära kombinationer” av trigonometriska funktioner $\cos t$ och $\sin t$, där oberoende av t . Eller, vilket går ut på samma sak: linjära kombinationer av de komplexa exponentialfunktionerna $e^{i t}$, så kallade *harmoniska funktioner* (eller *harmoniska svängningar*).⁽¹⁾

Fourierserierna, som tagits upp tidigare i kursen, handlar ju just om detta:

En ”godtycklig” funktion $x(t)$ (näja, nästan godtycklig – kontinuerlig och med kontinuerlig derivata räcker) på intervallet $-\pi < t < \pi$ kan skrivas:

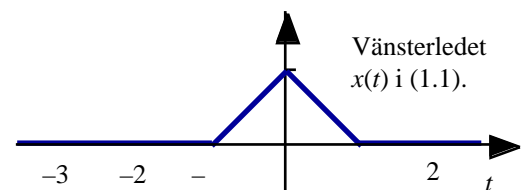
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (1.1)$$

där koefficienterna a_n och b_n erhålls ur

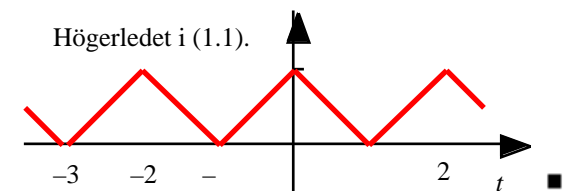
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt \, dt, \text{ då } n = 0 \text{ och } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt \, dt, \text{ då } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

Anmärkning 1: En viktig sak att observera är att alla termerna i högerledet av (1.1) är 2π -periodiska funktioner definierade för *alla* reella t . Högerledet är alltså definierat och 2π -periodiskt för alla t . Detta innebär att om funktionen $x(t)$ som vi utgått ifrån till äventyrs skulle vara definierad även utanför intervallet $-\pi < t < \pi$ men inte 2π -periodisk, så gäller relationen (1.1) i allmänhet *inte* utanför intervallet ifråga! Tydligast syns kanske den distinktionen om man ser på graferna för funktionerna i vänster respektive höger led.

Om t.ex. $x(t)$ är definierad som $-|t|$, då $-\pi < t < \pi$, och, säg, $= 0$ för övriga t -värden. så är dess graf (alltså vänsterledets graf):



Summan i högra ledet kommer däremot att ha grafen:

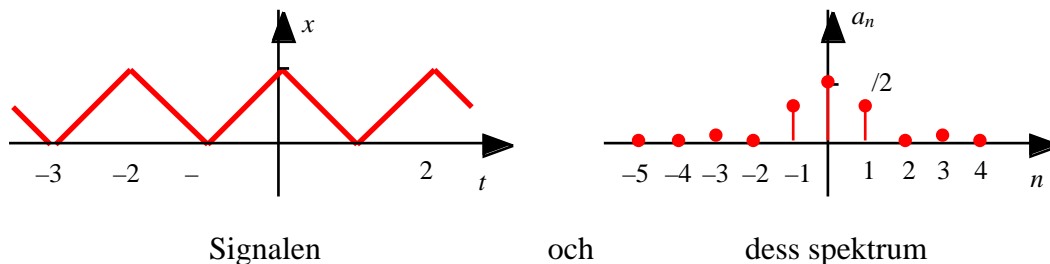


Likhet för alla t i (1.1) gäller tydligen om och bara om $x(t)$ är definierad för alla t och dessutom 2π -periodisk.

För en signalteoretiker eller akustiker skulle funktionen $x(t)$ vara en beskrivning av ”signalen”; t är då en tidsvariabel (vanligen mätt i sekunder) och x anger, t.ex. om det gäller ljud, tryckavvikelsen från normaltrycket (ljudtrycket). Relationen (1.1) uttrycker att signalen är sammansatt av ”harmoniska svängningar”

¹ Obs att $\cos t = (e^{i t} + e^{-i t})/2$, $\sin t = (e^{i t} - e^{-i t})/(2i)$ och $e^{i t} = \cos t + i \sin t$. Linjära kombinationer av $\cos t$ och $\sin t$ är därför alltid linjära kombinationer av funktioner av typ $e^{i t}$ och vice versa.

med ”frekvenser” som är heltalsmultipler av $\frac{1}{2}$ [Hz].² Koefficienterna a_n och b_n relaterar man då till respektive svängnings amplitud – de utgör signalens *spektrum*.



Rekommenderad övning: 1.1, sid. 15.

Med tanke på att räknelagarna för exponentialfunktionerna är enklare än de för de trigonometriska och med tanke på Eulers formler, är det naturligt att uttrycka fourierseriertermerna

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

i linjära kombinationer av e^{int} och e^{-int} . Man får

$$\begin{aligned} a_n \cos nt + b_n \sin nt &= \frac{1}{2} [a_n(e^{int} + e^{-int}) - ib_n(e^{int} - e^{-int})] = \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-int} = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}, \end{aligned}$$

där vi satt $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, om $n > 0$ och $c_{-n} = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}$, om $n < 0$.

Sätter man sedan $c_0 = \frac{a_0}{2}$, så kommer hela fourierserien att skrivas om till en mera lätthanterlig komplex oändlig serie:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

De komplexa c:koefficienterna kan beräknas direkt ur seriesumman $x(t)$:

För $n > 0$:
$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (\cos nt - i \sin nt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-int} dt,$$

för $n < 0$:
$$c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (\cos(-nt) + i \sin(-nt)) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-int} dt,$$

och för $n = 0$:
$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt,$$

dvs. sambandet
$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-int} dt$$

² 1 Hz = en svängning (eller ett varv)/sek.

gäller för *alla* heltal $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Sammanfattningsvis:

Komplex fourierserietveckling:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad (1.3)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} dt \quad (1.4)$$

Om $x(t)$ reell och

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

så gäller $a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, b_n = -2 \operatorname{Im} c_n, n > 0$ (1.5)

och $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, n > 0, c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, n < 0, c_0 = \frac{a_0}{2}$. (1.6)

Passande övningar: 1.2 – 1.4, sid.15.

Anmärkning 2: Valet av intervall $-\pi < t < \pi$ och periodlängd 2π ovan känns kanske litet konstlat. Det är dock mera en formelteknikalitet. Om periodlängden istället är L ($L > 0$) så kan man med skalning av t -axeln överföra det fallet till 2π -fallet – man substituerar $t = 2\pi/L \cdot \tau$ och får de mera generella sambanden:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n t/L + b_n \sin 2\pi n t/L), \quad (1.1')$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau) \cos 2\pi n \tau/L d\tau, \text{ då } n > 0 \text{ och } b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau) \sin 2\pi n \tau/L d\tau, \text{ då } n > 1, \quad (1.2')$$

med de komplexa varianterna:³

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/L}, \quad (1.3')$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau) e^{-2\pi i n \tau/L} d\tau. \quad (1.4')$$

³ Se också ZC 11.2, exercise 21, sid 495.

För L -periodiska $x(t)$ kan integrationsintervallen ovan ersättas med vilket som helst intervall som har längden L . ■

Övningar: 1.5 , 1.6

Fourierserierna handlar alltså om konsten att skriva *periodiska* funktioner som "linjära kombinationer" av komplexa exponentialfunktioner $e^{i \omega t}$. De så kallade *fourierintegralerna* befattar sig med samma problem, fast för funktioner $x(t)$ som är definierade för alla reella t och inte nödvändigtvis är periodiska. Man kan nämligen visa att för en stor klass av sådana funktioner gäller

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.7)$$

där

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.8)$$

Den första av dessa relationer kan uppfattas som att $x(t)$ är en linjär kombination av (de oändligt många) funktionerna $e^{i\omega t}$. Så när som på den konstanta faktorn $\frac{1}{2\pi}$ svarar faktorn $X(\omega)$ mot den linjära kombinationens koefficienter (funktionens *spektrum*), den benämns *fouriertransformen* av $x(t)$. Sambandet (1.7) kallas ibland *syntesekvationen* (för fouriertransformer) – den anger hur funktionen $x(t)$ "byggs upp" av sina "beståndsdelar" $\frac{1}{2\pi} X(\omega) e^{i\omega t}$. Analogt sägs (1.8) vara *analysekvation* – den talar om vilka "beståndsdelar" funktionen $x(t)$ har.

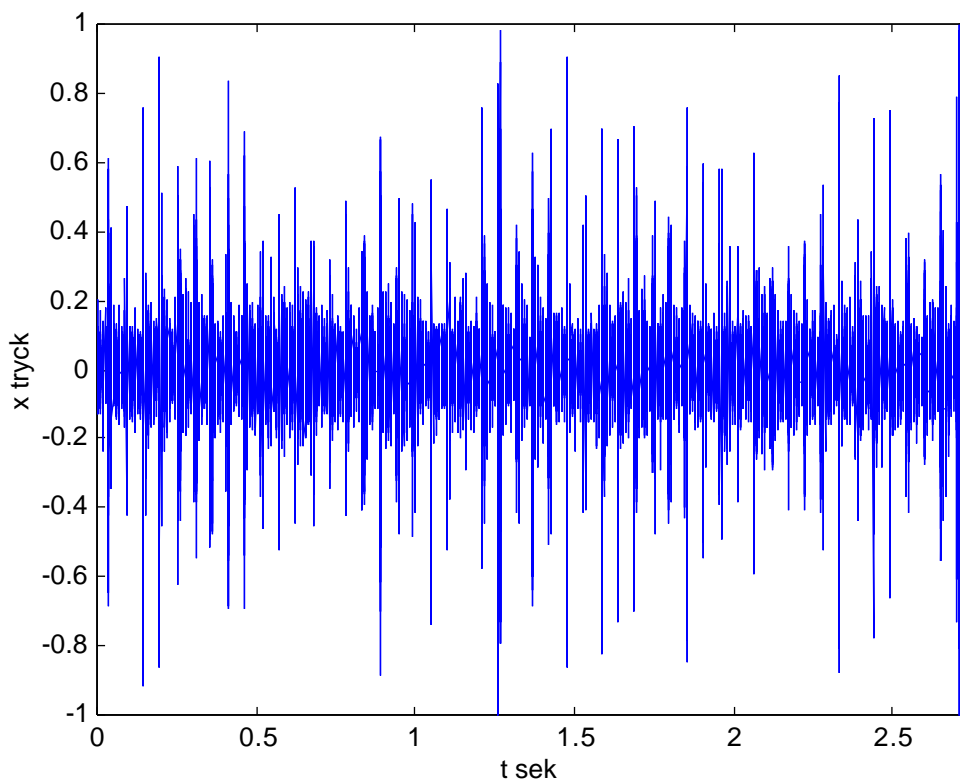
Anmärkning 3: Observera de formella likheterna mellan formelparen (1.3) resp. (1.4) å ena sidan och (1.7) resp. (1.8) å den andra. Skillnaden mellan (1.4) och (1.8) är förutom skalfaktorn $\frac{1}{2}$ att integrationsgränserna är olika. Samma gäller för (1.3) och (1.7) om man uppfattar serien i (1.3) som en "integral" där "integrationsvariabeln" n bara antar de diskreta värdena $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Detta är ingen tillfällighet. I viss mening kan man nämligen se fourierserietransformen som ett specialfall av fouriertransformen. ■

En intressant sak är att vi här har två helt olika sätt beskriva funktionen $x(t)$ på: Den ena anger funktionens värden för godtyckliga t (vänster led i (1.3) resp. (1.7)), den andra i stället spektret c_n resp. $X(\omega)$ (höger led). Det som gör detta faktum så användbart är att vissa egenskaper (som t.ex. $x(t)$:s maximum eller minimum) avläses lättast på funktionen i vänster led medan andra ses lättast på dess amplitudspektrum.

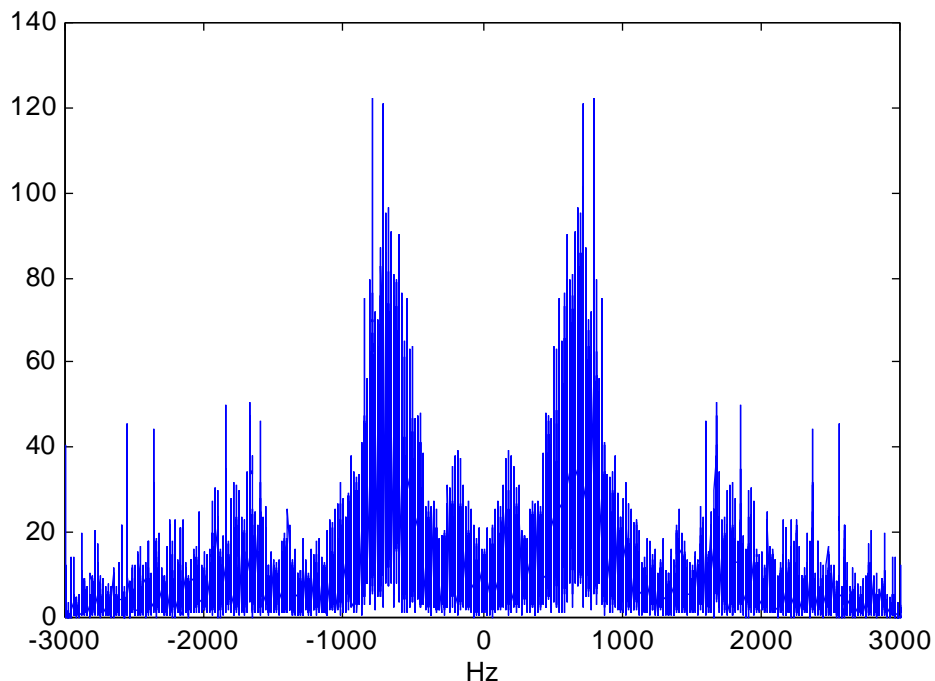
Som ett exempel⁴: Figuren nedan visar vibrationerna från en maskin som används vid massatillverkning – en så kallad raffinör. Den är i princip en stor kvarn. I det första steget huggs träråvaran upp till flis som sedan bearbetas mekaniskt (mals) i raffinören. De kemikalier som sedan tillsätts träfibren kan efter malningen lättare lösa ut de massafibrer som används vid papperstillverkningen. Raffinören består i princip av en fast kvarnskiva och en roterande fastsatt på en axel vilken bärs upp av tre rullningslager.

Mätinstrumentet, en accelerometer, sitter nära ett av rullningslagren som i detta speciella fall har en skada på en av de 16 rullarna. Skadan är en tvärgående spricka som varje gång den passerar kontaktzonen mellan rullen och lagrets inner- eller ytterring orsakar ett slag. Diagrammet är grafen för den funktion $x(t)$ som anger ljudtrycket x , med tidsvariabeln t .

⁴ Källa MWL (Marcus Wallenberglaboratoriet, KTH).



Grafen själv är svårtolkad – det är svårt att urskilja vad som härrör från det brusartade ljud som maskinen alltid alstrar och det extraljud som härrör från skadan. Om man däremot bestämmer spektret för signalen $x(t)$, vilket kan göras med en numerisk variant av analyskvationen (1.8), så får man diagrammet



där man ser tydliga stora ”tontoppar” vid c:a 800 Hz vid sidan av en del mindre. Tontopparnas frekvenslägen bestäms av skadans periodicitet och kallas skadans signatur. Signaturen används vid maskinell övervakning för att upptäcka eventuella skador i ett tidigt skede. Tidig upptäckt gör det möjligt att planera in underhållsstopp och undvika de ofta mycket höga kostnader som ett oplanerat driftstopp eller ett haveri skulle innebära.

Passande övningar: 1.7, sid 16.

Fouriertransformen för en signal kan alltså ge viktig information om signalen, information som kan vara svår att få fram på annat sätt. Intressant är ofta att veta hur förändringar i signalen påverkar fouriertransformen och vice versa.

Om t.ex. en signal klipps av (man kanske inte har tid att lyssna på hela signalen), på vilket sätt ändras då fouriertransformen? Om en signal samplas (dvs. den avläses bara vid vissa diskreta tidpunkter), vad händer då med fouriertransformen? Och omvänt, om fouriertransformen (spektret) ändras genom att man klipper bort vissa frekvenser (s.k. filtrering), på vilket sätt påverkas då signalen?

Problemställningar av det slaget diskuteras närmare längre fram (Kap 7.3 (g) och (h)).

I de två följande avsnitten skall vi titta litet på hur man mäter avvikelser mellan signaler; vad skall man t.ex. mena med att två signaler är nästan lika?

1.2 Litet om fel

Alla uppmätta storheter avviker naturligtvis mer eller mindre från den (tänkta) ideala storheten som man egentligen är ute efter – i stället för den exakta signalen $x(t)$, $a < t < b$ uppmäter man en annan, $\hat{x}(t)$. För att kunna göra en felanalys behöver man komma överens om ett avståndsmått som anger hur mycket funktionen $\hat{x}(t)$ avviker från $x(t)$. Det som man kanske först kommer att tänka på är att man tar den *maximala* avvikelser, dvs.

$$d_m = \max_{a < t < b} |x(t) - \hat{x}(t)| \quad (1.9)$$

som ett sådant mått. Vid närmare eftertanke förstår man dock att detta inte är särskilt lyckat ur signalteorins synpunkt: Om $x(t)$ och $\hat{x}(t)$ skulle vara två ljudupptagningar av en konsert, identiska så när som på att någon under ett kort tidsintervall hostar i den ena av upptagningsmikrofonerna. Storheten d_m skulle då väsentligen bestämmas av hostningens intensitet, som ju kan vara rätt stor. Trots detta skulle man nog inte vilja uppfatta de båda upptagningarna som så värst olika.

Ett bättre mått, som inte lägger så stor vikt vid kortvariga avvikelser får man i stället ur det s.k. *effektivvärdet* av avvikelserna.⁵

$$d_2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt \quad , \quad (1.10)$$

där $a < t < b$ är tidsintervallet under vilken upptagningen görs.⁶

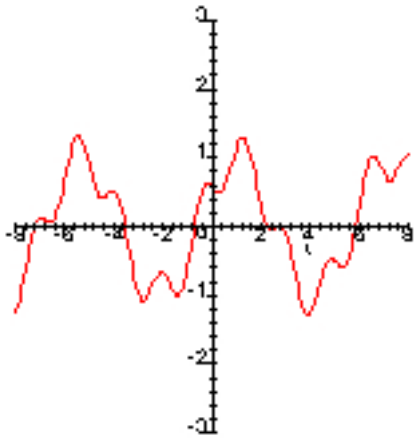
I teoretiska sammanhang har man också signaler som är definierade på hela reella talaxeln, man väljer då istället den s.k. *funktionsnormen*:

$$\|x - \hat{x}\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (1.10')$$

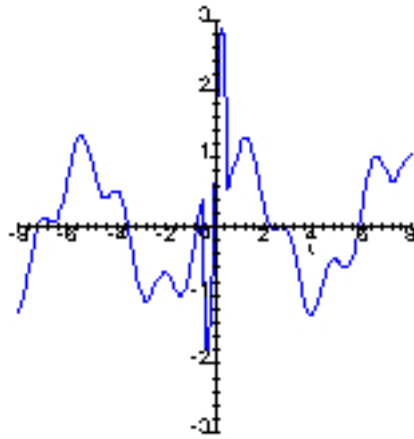
som felmått (förutsatt förstås att den generaliserade integralen är konvergent).

⁵ Se kursboken i ljud- och vibrationslära (Bodén, Carlsson, Glav, Wallin och Åbom), kap 1.3.

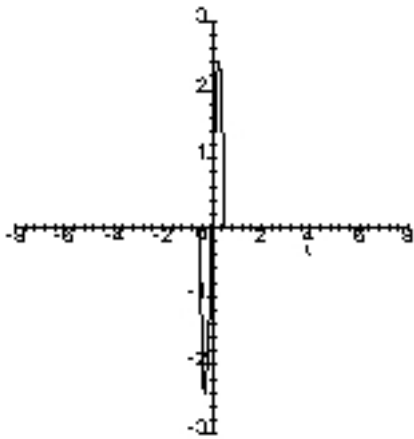
⁶ Observera att d_m och d_2 och x har samma fysikaliska dimension – tryckdimension (Pascal) i fallet med ljudupptagningen.



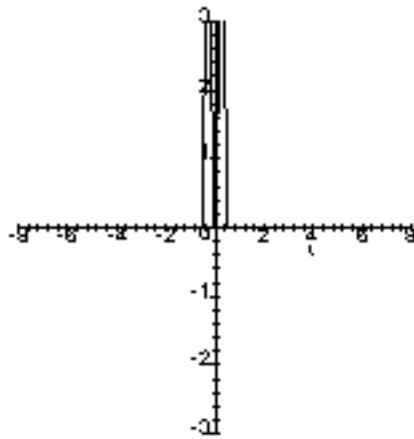
Ostörd signal $x(t)$



Störd signal $x(t)$



Differenssignal $x(t) - x(t)$,
maxavvikelse $d_m = 2,4$.



Kvadrerad avvikelse $|x(t) - x(t)|^2$, $d_2 = 0,4$.
(1.10)-integralens värde = arean under grafen.

Övningar: 1.8, 1.9, sid. 16.

Integralen

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt, \quad (1.11)$$

kan ses som ett mått på signalens totala energi:

T.ex. för det fall att $x(t)$ anger strömstyrkan i ampere genom ett motstånd R [], så ges den spänningen av $y(t) = R \cdot x(t)$ [V] och den momentana effekten W [W] av

$$W(t) = x(t) \cdot y(t) = R \cdot |x(t)|^2.$$

Integralen (1.11) ger alltså den totala energin under tidsintervallet $a \leq t \leq b$, så när som på proportionalitetsfaktorn R . Medelvärde

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |x(t)|^2 dt, \quad (1.12)$$

blir då på samma sätt proportionellt mot signalens medeleffekt.

En motsvarande tolkning kan göras också för det akustiska fallet då $x(t)$ ($= p(t)$) ljudtrycket. Generellt ges nämligen den momentana effekten W hos ett mekaniskt system produkten [kraft] \times [hastighet] = [tryck] \times [area] \times [hastighet]. I akustiska sammanhang kan man visa att ljudtrycket p under allmänna omständigheter är proportionellt mot partikelhastigheten u i mediet,

$$p = \rho c u,$$

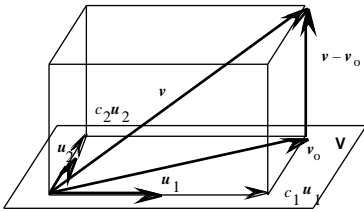
där konstanterna ρ [kg/m³] och c [m/s] är det ostörda mediets densitet respektive ljudhastigheten i mediet.⁷ Då är alltså den momentana effekten per m², $W/A = p \cdot u = (\rho c) u^2 = \rho c |p(t)|^2$.

Storheterna och $\int_a^b |p(t)|^2 dt$, respektive $\frac{1}{b-a} \int_a^b |p(t)|^2 dt$, representerar, så när som på en proportionalitetskonstant, ljudsignalens totala energi respektive medeleffekt. Om avståndsmåttet d_2 mellan två signaler är litet, så innebär detta alltså att de *energimässigt* ligger nära varandra.

Men det finns flera anledningar till det speciella valet av felmått. En har att göra med ett nära släktskap med minstakvadratmetoden. Om detta handlar nästa avsnitt.

1.3 Om ortogonalitet. Parsevals relation.

Partiellsummor till en funktions fourierserie ger ofta kusligt bra approximationer till funktionen. Detta kan i på sätt och vis förklaras av att fourierutvecklingen i viss mening är optimal. Informellt kan man förstå hur detta hänger ihop via den geometriska analogi som ligger till grund för det generella approximationsförfarande som går under namnet "minstakvadratmetoden".



Anta att u_1, u_2 och v är tre vektorer i rummet sådana att u_1 och u_2 spänner upp ett plan V . Om v ligger i detta plan, så kan v skrivas som en linjär kombination av u_1 och u_2

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

Vektorerna u_1 och u_2 kan ses som en bas för ett koordinatsystem i planet V och koefficienterna c_1 och c_2 som koordinaterna för vektorn v i den basen. Dessa är särskilt lätta att beräkna om vektorerna u_1 och u_2

är vinkelräta mot varandra, dvs då den skalära produkten $u_1 \cdot u_2 = 0$. Man har nämligen då att

$$u_1 \cdot v = c_1 u_1 \cdot u_1 + c_2 u_1 \cdot u_2 = c_1 |u_1|^2,$$

varav $c_1 = (u_1 \cdot v) / |u_1|^2$ och på samma sätt $c_2 = (u_2 \cdot v) / |u_2|^2$ (1.13)

Om v inte ligger i planet V så finns ingen möjlighet att uttrycka v med hjälp av u_1 och u_2 som i (1.12).

Däremot finns det i planet V en vektor v_0 som ligger närmast v , nämligen den för vilken $v - v_0$ är vinkelrät mot planet, och alltså också mot u_1 och u_2 . Detta innebär att om $v_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2$, så måste

$$(v - v_0) \cdot u_k = (v - c_1 u_1 - c_2 u_2) \cdot u_k = 0, k = 1, 2.$$

Detta ger igen sambanden (1.13) och man kan sammanfatta:

Den vektor i planet som ligger närmast v ges av

$$v_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2, \text{ där } c_i = \frac{u_i \cdot v}{|u_i|^2}, i = 1, 2 \quad (1.14)$$

och "felet" man gör då man approximerar v med v_0 ges av $|v - v_0|$. Enligt Pythagoras' sats (se fig) blir detta:

$$|v - v_0|^2 = |v|^2 - |v_0|^2 = |v|^2 - |c_1|^2 |u_1|^2 - |c_2|^2 |u_2|^2.$$

Man ser också att

$$|v|^2 = |c_1|^2 |u_1|^2 + |c_2|^2 |u_2|^2. \quad (1.15)$$

Om speciellt v ligger i planet V , så kommer $v_0 = v$ och felet vara = 0, d.v.s likhet gäller

$$|v|^2 = |c_1|^2 |u_1|^2 + |c_2|^2 |u_2|^2 \quad (1.16)$$

Förfarandet kan utan vidare generaliseras till vektorer i \mathbf{R}^n och till flera "basvektorer" u_k än två och även till vektorer i \mathbf{C}^n med komplexa koordinater, detta om man definierar skalärprodukt av två sådana vektorer med koordinater

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ och } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

⁷ Se kursboken i ljud- och vibrationslära (Bodén, Carllson, Glav, Wallin och Åbom), kap 1.3 - 4, 4.2.2 och 4.2.6.

enligt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$. (Obs konjugeringen!)

Normen (längden), $|\mathbf{x}|$, av en vektor definieras då av

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^n |x_k|^2.$$

Anmärkningsvärt nog kan allt detta generaliseras ännu mer till att handla om funktioner i stället för vektorer! Detta om man definierar "skalärprodukt mellan två funktioner" $x(t)$ och $y(t)$ som

$$(x(t), y(t)) = \int_b^c x(t) \overline{y(t)} dt, \text{ där } b < t < c \text{ är ett passande intervall}^8 \quad (1.17)$$

och i analogi därmed "normen av $x(t)$ ", $||x(t)||$, enligt

$$||x(t)||^2 = (x(t), x(t)) = \int_b^c |x(t)|^2 dt. \quad (1.18)$$

som då alltså motsvarar det geometriska längdbegreppet. Som vi ser är detta just energiintegralen i (1.11).

Man får en koppling mellan detta och fourierserieutveckling av L -periodiska funktioner om man definierar skalärprodukten och norm som i (1.17) och (1.18) med ett integrationsintervall av längd L :

$$(x(t), y(t)) = \int_L x(t) \overline{y(t)} dt \text{ och } ||x(t)||^2 = \int_L |x(t)|^2 dt. \quad (1.19)$$

Syntesekvationen $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n t}, \quad t \in [0, 2\pi/L]$

uttrycker att "alla" L -periodiska funktioner exakt kan skrivas som en linjär kombination av "basfunktionerna"

$$u_n(t) = e^{i n t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

med $c_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, som motsvarande koordinater.

Eller annorlunda uttryckt: "Vektorn" $x(t)$ ligger i det "rum" som "vektorerna" $e^{i n t}, n = 0, \pm 1, \dots$, spänner upp.

För dessa basfunktioner gäller nu att deras parvisa skalära produkter är = 0:

$$\begin{aligned} (u_m(t), u_n(t)) &= \int_{-L/2}^{L/2} e^{i n t} \cdot e^{-i m t} dt = \int_{-L/2}^{L/2} e^{i (m-n)t} dt = 0 \text{ om } m \neq n \\ &= \frac{e^{i (m-n) L/2} - e^{-i (m-n) L/2}}{i (m-n)} = \frac{e^{i L (m-n)/2} - e^{-i L (m-n)/2}}{i (m-n)} = L \cdot \frac{\sin((m-n)L/2)}{(m-n)} = 0, \end{aligned}$$

eftersom $\sin k = 0$ för varje heltal k . Basfunktionerna är alltså parvis vinkelräta.

För normerna gäller

$$||u_n(t)||^2 = \int_{-L/2}^{L/2} e^{i n t} \cdot e^{-i n t} dt = \int_{-L/2}^{L/2} dt = L,$$

d.v.s. basfunktionernas normer (basvektorernas längder) är alla $= \sqrt{L}$.

Detta betyder att koefficienterna c_n i syntesekvationen bör kunna beräknas enligt principen (1.13) ovan

⁸ Beteckningen $(x(t), y(t))$ för skalärprodukten av två funktioner är rätt vedertagen. Observera att beteckningen $x(t) \cdot y(t)$ inte är lämplig eftersom den ju allmänt används när man multiplicerar två funktioner "som vanligt".

$$c_n = \frac{(x(t), u_n(t))}{\|u_n(t)\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t) \cdot e^{-i n t} dt$$

vilket inte är något annat än just analyskvationen.

Vidare: Partialsummorna till fourierserien,

dvs.
$$x_M(t) = \sum_{n=-M}^M c_n e^{i n t},$$

kan uppfattas som den bästa approximation till $x(t)$ som man kan få genom att linjärkombinera de $2M + 1$ funktionerna $e^{i n t}, n = 0, \pm 1, \dots, \pm M$, på samma sätt som v_0 approximerar v ovan. Felet vid approximationen mäts då med normen

$$\|x(t) - x_M(t)\|^2.$$

Tänker man på $x(t)$ som en signal, så är normkvadraten som vi sett ovan ett mått på energin/period i signalen. För signalen x_M kommer alltså bortfallet, i förhållande till signalen $x(t)$, energimässigt att vara så litet som möjligt jämfört med andra approximationer som är linjära kombinationer av de $2M + 1$ funktionerna $e^{i n t/L}, n = 0, \pm 1, \dots, \pm M$.

Sambandet (1.14) ovan ("Pythagoras' sats") kommer i fourierseriesammanhang att få utseendet

$$\int_{-L/2}^{L/2} |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2 = \sum_{n=-M}^M |c_n|^2 \|u_n(t)\|^2 = L \sum_{n=-M}^M |c_n|^2. \quad (1.20)$$

Likheten kallas *Parsevals relation*. En energimässig tolkning av den är att:

Totala energin/period hos en signal = summan av delsvängningarnas totala energi/period.

För fouriertransformen och mera godtyckliga komplexvärda funktioner $x(t)$, definierade på hela reella axeln, kan man visa att motsvarande sakförhållanden gäller. Om den skalärprodukt och norm definieras av

$$(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt \quad \text{och} \quad \|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{konvergens förutsatt}),$$

så kommer

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \|X(\omega)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.21)$$

Vänstra ledet är då signalens totala energi medan högra ledet är "summan" av energierna hos delsvängningarna. Man tolkar då $\frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$ som energin hos svängningarna med vinkelfrekvenser i det "infinitesimala" intervallet mellan ω och $\omega + d\omega$. Motiveringen till faktorn $\frac{1}{2\pi}$ är mera djupsinnig, så den väntar vi med.

Den matematiska substansen i Parsevals relation är betydande, vilket något litet framgår av nästa exempel.

Exempel 1.1

Enligt övning 1.2b har vi för den 2π -periodiska funktionen $x(t)$ som i intervallet $-\pi < t < \pi$ är $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n t}$:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{7} e^{-i t} + \frac{1}{72} e^{-7 i t} + \frac{1}{52} e^{-5 i t} + \frac{1}{32} e^{-3 i t} + e^{-i t} + e^{i t} + \frac{1}{32} e^{3 i t} + \frac{1}{52} e^{5 i t} + \frac{2}{7} e^{i t} + \frac{1}{2} e^{i t} + \dots$$

Parsevals relation (1.20) ger då att

$$\|x(t)\|^2 = 2 \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i n t}|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \cdot 2\pi = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

där $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1 dt = 1$

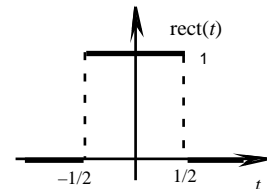
varav $\frac{2}{3} = \frac{3}{2} + \frac{8}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$, d.v.s. $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{4}{96}$.

Ett resultat som knappast framstår som självklart! ■

Exempel 1.2:

Fouriertransformen för den så kallade *rektangelfunktionen*

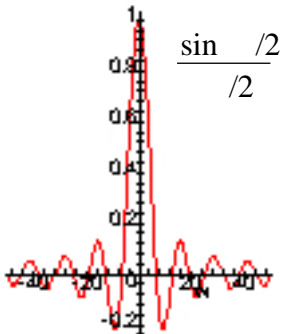
$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } -1/2 < t < 1/2, \\ 0, & \text{för övriga } t, \end{cases}$$



är

$$X(\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{i} = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2},$$

detta då $\omega \neq 0$. Och för $\omega = 0$ får man direkt att $X(0) = 1$.



Parsevals relation (1.21) utsäger då att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega/2)}{2/4} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_{-1/2}^{1/2} |\text{rect}(t)|^2 dt = 2 \int_{-1/2}^{1/2} 1^2 dt = 2,$$

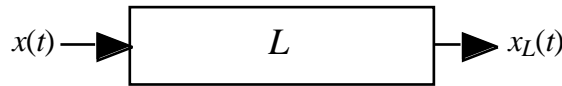
vilket inte heller är något på annat sätt lättfunnet resultat. (Integranden i den vänstra integralen saknar nämligen elementär primitiv funktion, så dess värde kan inte bestämmas med den vanliga rutinmetoden.) ■

Övningar: 1.10 – 1.12, sid.16.

1.4 Orientering om linjära tidsinvarianta system och fouriertransformer

Det man vill studera i tekniska och fysikaliska sammanhang är ofta ett slags "processer" som förvandlar tidsberoende fysikaliska storheter, "insignalerna", till andra tidsberoende fysikaliska storheter, "utsignalerna". En radioapparat tar in elektromagnetiska vågor och skickar ut ljudvågor, en pendel påverkas av en kanske tidsberoende kraft (insignalen) och svarar med att svänga på ett visst sätt (utsignalen), Temperaturen i en ugn varieras på ett visst sätt (insignalen) och steken "svarar" med att få en viss tidsberoende temperaturfördelning inom sig (utsignalen). Exempelen kan med lätthet mångfaldigas.⁹

Schematiskt kan man teckna detta

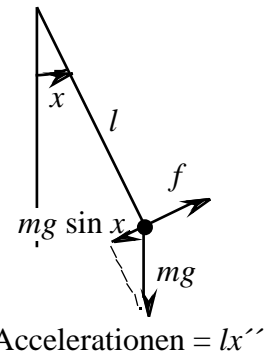
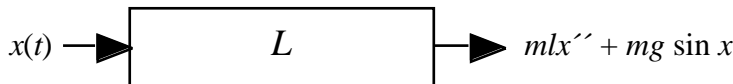


där $x(t)$ får stå för insignalen, L för själva "processorn" – eller *systemet* som man hellre säger – och $x_L(t)$ för utsignalen.

En modell för en enkel pendel som påverkas av en yttre kraft f som markerad i figuren. Sambandet mellan pendelrörelsen $x(t)$ (insignalen) och kraften $f(t)$ ges enligt Newtons kraftlagar av differentialekvationen:

$$mlx''(t) + mg \sin x(t) = f(t).$$

Observera att systemet matematiskt sett förvandlar *funktioner* till *funktioner*. Inom matematiken kallar man gärna sådana processer för *operatorer*. Operatortorn det handlar om i pendlexemplet är den som förvandlar $x(t)$ till räkneuttrycket i ekvationens vänsterled.



En mycket viktig klass av av sådana processer är de så kallade *linjära, tidsinvarianta systemen* (LTI-systemen).¹⁰ Sådana karakteriseras av

1° (*Linjaritet*)

Om en insignal $z(t)$ är en linjär kombination av två insignaler $x(t)$ och $y(t)$,

$$z(t) = ax(t) + by(t), \quad a \text{ och } b \text{ konstanter,}$$

så är utsignalen $z_L(t)$ samma linjära kombination av $x_L(t)$ och $y_L(t)$:

$$z_L(t) = ax_L(t) + by_L(t)$$

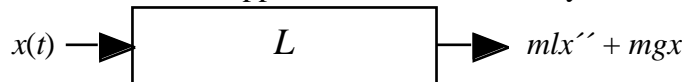
2° (*Tidsinvarians*)

Om insignalen förskjuts i tiden, dvs. om $x(t)$ ersätts med $x(t - \tau)$, där τ är en reell konstant,¹¹ så kommer också utsignalen att förskjutas lika mycket i tiden:

$$y(t) = x(t - \tau) \quad y_L(t) = x_L(t - \tau)$$

och ett tredje villkor, ett slags kontinuitetsvillkor, vars matematiska formulering vi inte går in på här, men som intuitivt innebär att "små" förändringar i insignalen bara föranleder "små" förändringar i utsignalen.

Systemet i pendlexemplet ovan är inte av LTI-typ eftersom sinusfunktionen inte är linjär. Men för små utslagsvinklar har man att $\sin x \approx x$. Med den approximationen får man systemet



som är av LTI-typ. (Kontrollera att villkoren 1° och 2° är uppfyllda.)

Kravet på att processen skall vara tidsinvariant är i många fall mycket naturligt – en radiomottagare exempelvis förväntas ju bete sig likadant igår som idag och imorgon. Likaså vill man kunna hantera steken i ugnen på samma sätt oavsett när man vill laga till den. Kravet på linjaritet torde vara svårare att tillgodose i prak-

⁹ Se också kursboken i ljud- och vibrationslära, exempel 3-6 där insignalerna är de krafter som exciterar en bil. Dessa förorsakar vibrationshastigheterna på olika ställen i bilen – utsignalerna.

¹⁰ Se också §3.3 i läroboken i ljud- och vibrationslära.

¹¹ $x(t - \tau)$ är samma signal som $x(t)$ fast avsänd τ tidsenheter senare (om $\tau > 0$).

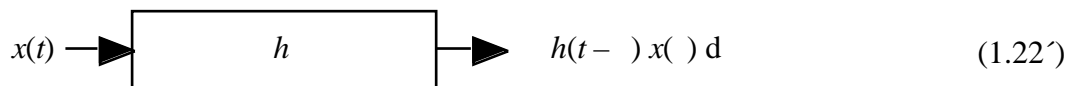
tiken, men det är trots allt i många fall uppfyllt med god approximation om man håller sig till signaler med måttligt energiinnehåll. En bra förstärkare bör till exempel fungera linjärt, åtminstone inom sitt arbetsområde.

Anmärkningsvärt är nu att det finns ett generellt sätt att i formler uttrycka hur LTI-system fungerar och att det dessutom finns en nära koppling mellan LTI-system och fouriertransformen:

- Man kan visa att det till varje LTI-system finns en (eventuellt generaliserad)¹² funktion $h(t)$ av reell variabel, så att

$$x_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (1.22)$$

Omvänt är systemet



(med måttliga regularitetskrav på h och x) ett LTI-system. (Kontrollera villkoren 1° och 2°!)

Anmärkning: Integralen i (1.22) kan tolkas intuitivt som att man vid varje tidpunkt t "linjärkombinerar" de oändligt många funktionsvärdena $x(\tau)$. Linjärkombinationens koefficienter beror av tiden t och ges av $h(t-\tau)$.

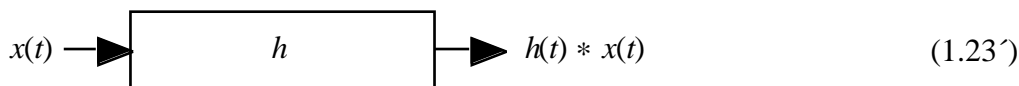
Funktionen h karakteriserar alltså LTI-systemet fullständigt och den kallas, av skäl som vi kommer till senare, *systemets pulssvar*. Räkneoperationen i högerledet i (1.22) spelar självfallet en viktig roll i dessa sammanhang och man har gett också den ett särskilt namn. Man säger att

$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau$ är *faltningen*¹³ av funktionerna $h(t)$ och $x(t)$

och skriver

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau = h(t) * x(t). \quad (14) \quad (1.23)$$

Alltså



Faltningen visar sig ha många intressanta egenskaper. En nämner vi redan nu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau,$$

$$\text{dvs.} \quad h(t) * x(t) = x(t) * h(t). \quad (1.24)$$

(Kontrollera att detta är riktigt – betrakta t som en konstant och substituera τ mot $t-\tau$ i en av integralerna.)

- Om man som insignal till ett LTI-system tar en harmonisk svängning $x(t) = e^{i\omega t}$, så får man som utsignal

$$h(t) * e^{i\omega t} = e^{i\omega t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega t} e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \cdot e^{i\omega t} = H(\omega) \cdot e^{i\omega t},$$

¹² Vad detta är kommer vi till i kapitel 4.

¹³ Engelska och franska: *convolution*, tyska: *Faltung*.

¹⁴ I kursboken i ljud- och vibrationslära skrivs $x(t) \circ y(t)$.

där $H(\omega)$ tydligen är fouriertransformen av pulssvaret $h(t)$:

$$e^{i\omega t} \rightarrow \boxed{h} \rightarrow H(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (1.25)$$

Utsignalen av en harmonisk funktion av viss frekvens är alltså en harmonisk funktion med samma frekvens.

De harmoniska funktionerna $e^{i\omega t}$ är egenfunktioner till *alla(!)* LTI-system.
Motsvarande egenvärde ges av fouriertransformen för systemets pulssvar.

Funktionen $H(\omega)$ brukar kallas *systemets överföringsfunktion*.

Låt nu $x(t)$ vara en "godtycklig" insignal och $y(t)$ dess utsignal. Enligt syntesekvationen (1.7) har vi,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Kombinerar man detta med linjariteten hos LTI-systemen, så får man

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \rightarrow \boxed{h} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

och efter integration

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \rightarrow \boxed{h} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = y(t)$$

Men enligt syntesekvationen, som ju också gäller för funktionen $y(t)$, är

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

vilket innebär att

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \quad (1.26)$$

Sammanfattningsvis:

Om

$$x(t) \rightarrow \boxed{h} \rightarrow y(t),$$

så gäller för fouriertransformerna till de tre ingående funktionerna x , h och y att

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega).$$

Detta mycket generella samband är utgångspunkten till en idé om hur man kan ta reda på hur ett förelagt LTI-system fungerar. Dvs. man vill veta hur man till given insignal beräknar dess utsignal. Enligt (1.22) räcker det då att bestämma systemets pulssvar.

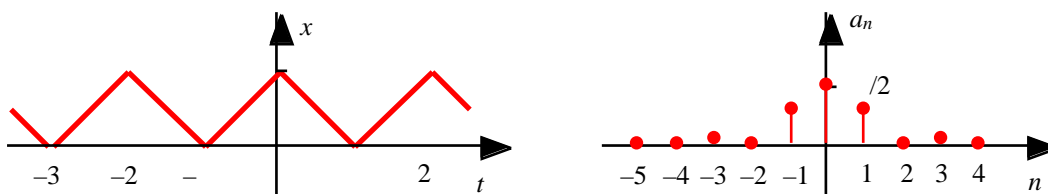
Vi tänker oss att systemet levereras som en "svart låda" vars inandöme är oåtkomligt för oss. Det enda vi kan göra med den är att skicka in signaler och mäta upp motsvarande utsignaler. Följande checklista kan då användas.

- 1° Skicka in en känd insignal $x(t)$ och mät upp utsignalen $y(t)$.
- 2° Beräkna fouriertransformerna $X(\omega)$ och $Y(\omega)$ – analysekvationen (1.8) talar om hur detta görs.
- 3° Bilda kvoten $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ – detta ger fouriertransformen för det sökta pulssvaret.
- 4° Beräkna pulssvaret $h(t)$ – syntesekvationen (1.7) talar om hur detta görs.
- 5° Med hjälp av pulssvaret kan man sedan förutsäga vilken utsignal $u(t)$ som man får om en signal $z(t)$ – vilken som helst! – skickas in i systemet,

$$u(t) = h(t) * z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) z(\tau) d\tau$$

Obs dock att detta bara en skissartad beskrivning av ett tänkbart förfarande. En hel del beräkningstekniska komplikationer kan tillstå. Exempelvis kan $X(\omega) = 0$ betydande delar av ω -axeln och då kan divisionen under punkt 3 inte utföras där.

Övningar till kap 1



En signal

och

dess spektrum

- 1.1** Figuren ovan ger (en bit av) grafen för den 2-periodiska signal $x(t)$ som i intervallet $-1 < t < 1$ antar värdena $x(t) = 1 - |t|$. Verifiera att amplituderna för sinussvängningarna, b_n , alla är $= 0$ och de för cosinussvängningarna,

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{då } n \text{ jämnt och } n \neq 0, \\ \frac{4}{n^2}, & \text{om } n \text{ udda,} \\ 1, & \text{då } n = 0. \end{cases}$$

- 1.2 a.** Verifiera att om $x(t)$ är en reellvärd funktion, så är $c_{-n} = \overline{c_n}$ och omvänt: Om $c_{-n} = \overline{c_n}$ i serien (1.3) så är $x(t)$ en reellvärd funktion.

(Ledning: Utnyttja att $\overline{c_n} e^{-int} + c_n e^{int} = 2 \operatorname{Re}(c_n e^{int})$.)

- b.** Bestäm den komplexa fourierserien (1.3) till funktionen i uppgift 1.1.

- 1.3 a.** Verifiera att för reella a och b , $a \cos t + b \sin t = A \cos(t + \phi)$, där

$$A = (a^2 + b^2)^{1/2} \text{ och } \tan \phi = -b/a, (\phi = -\pi/2 \text{ om } a = 0).$$

Funktionens maximalvärde, A , är svängningens *amplitud*, ϕ är *fasvinkeln* eller *fasläget* och $1/(2\pi)$, är svängningens *frekvens*.

I ord kan relationen i 1.3a uttryckas: Varje linjärbination av sinus- och cosinussvängningar med samma frekvens kan uppfattas som *en* fasförskjuten cosinussvängning med den frekvensen.

- b.** Vilka är amplituderna A_n och fasvinklarna ϕ_n för de olika frekvenserna hos funktionen i uppgift 1.1?

- c.** Verifiera att koefficienterna c_n av serien (1.3) då $x(t)$ reell också ges av

$$\frac{1}{2} A_n e^{i\phi_n} \text{ då } n > 0, \frac{1}{2} A_{-n} e^{-i\phi_n} \text{ då } n < 0 \text{ och } c_0 = A_0.$$

- 1.4** Funktionen $x(t)$ är 2-periodisk och

$$x(t) = \frac{t}{2}, \text{ då } -1 < t < 1.$$

- a** Beräkna dess komplexa fourierseriekoefficienter med hjälp av (1.4).

- b** Bestäm sedan t ex med hjälp av sambanden (1.5) dess reella fourierseriekoefficienter.

- 1.5** Utför substitutionen $t = 2\pi \tau$ i (1.1) – (1.4) och verifiera därigenom relationerna (1.1') – (1.4'). Verifiera också att relationerna (1.5) och (1.6) mellan a -, b - och c -koefficienterna gäller oförändrade. Vilket utseende får de komplexa formlerna om periodlängden $= 1$?

1.6 Funktionen $x(t)$ är 2-periodisk och $x(t) = \frac{2}{4} t^2 - \frac{1}{3}$, då $-1 < t < 1$.

a Bestäm dess komplexa fouriersseriecoefficients.

b Bestäm sedan t ex med hjälp av sambanden (1.5) dess reella fouriersseriecoefficients.

1.7 Beräkna fouriertransformerna till

a. $x(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| \leq 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases}$ **b.** $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{om } 0 \leq t, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$ **c.** $x(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } 0 \leq t, \\ e^t, & \text{om } t < 0. \end{cases}$

d. $x(t) = e^{-|t|}$.

1.8 Graferna ovan hör till signalerna

$$x(t) = \cos(t - 1) - \frac{1}{3} \cos(3,7t - 1,7) \quad \text{och} \quad x(t) = \begin{cases} x(t) + 50t(\frac{1}{4} - t^2), & \text{då } |t| \leq \frac{1}{2}, \\ x(t), & \text{då } \frac{1}{2} < |t| \leq 8. \end{cases}$$

Beräkna d_m och d_2 definierade som i (1.9) och (1.10).

1.9 Låt $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2 - 1/3$, då $-1 < t < 1$, medan funktionerna = 0 för övriga t -värden.

Bestäm funktionernas effektivvärden i intervallet $-1 < t < 1$ och även funktionsnormerna i $-1 < t < 1$.

1.10 a. Bestäm med hjälp av Parsevals relation och resultatet av uppgift 1.4a värdet av summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

b. Använd på samma sätt resultatet från uppgift 1.6.a för att summera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

1.11 a. Använd syntesekvationen för fourierintegralerna och det faktum att $\frac{\sin \omega/2}{\omega/2}$ är fouriertransformen

av $\text{rect}(t)$ för att beräkna värdet av $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega/2}{\omega/2} d\omega$.

b. Funktionen som är $\frac{\sin x}{x}$, för $x \neq 0$ och = 1 då $x = 0$, brukar kallas "sinus cardinalis" eller

kortare sinc. Vilket värde har $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc} x dx$? Vilka är nollställena till sinc? Skissera kurvan.

1.12 Låt $a > 0$ och $x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{då } t \geq 0, \\ 0, & \text{då } t < 0, \end{cases}$ $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{då } t > 0, \\ e^{at}, & \text{då } t \leq 0 \end{cases}$ samt $z(t) = e^{-a|t|}$.

Bestäm funktionernas fouriertransformer. Använd sedan Parsevals relation för att bestämma värdet av

integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega$.

Om innehållet i kompendiet för övrigt

I de följande avsnitten tittar vi närmare på det matematiska hantverket som hör till de metoder som beskrivits i den här inledningen.

Kap 2 tar upp geometriska aspekter på signalers grafer och inför ett par speciella funktioner med vars hjälp man t.ex. enkelt kan ”klippa av” signaler.

Kap 3 handlar om periodiska funktioners enklaste egenskaper och om begreppet ”periodisk fortsättning”.

I kap 4 införs de så kallade generaliserade funktionerna. Det har nämligen visat sig att de ”vanliga” funktionerna inte helt duger för att på ett bra sätt beskriva alla tänkbara signaler – dessa generaliserade funktioner passar bättre.

Kap 5 tar upp några viktiga summationsformler. Dessa utgör grunden i fouriermetoderna.

Kap 6 handlar om komplexa fourierserier och fourierserietransformen.

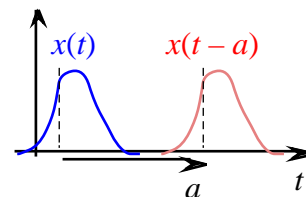
Och slutligen handlar kap 7 om fouriertransformen och dess egenskaper.

2. Geometriskt om grafer

En av den här kursens syften är att ge de viktigaste matematiska metoderna som man använder för att bearbeta signaler av olika slag. Ofta är det så att den signal som man iakttar inte är den egentliga, utan det man "ser" är någon slags deformation, förvrängning eller stympning av den "riktiga". Det är därför viktigt att på olika sätt kunna "manipulera" grafiska bilder av signaler. Varje sådan manipulation har en analytisk (d.v.s. "formelmässig") motsvarighet. Vi går igenom några enkla men viktiga sådana fall. Signalen själv tänker vi oss beskriven av en funktion $x(t)$, där t ofta har (men inte måste ha) dimensionen tid.¹⁵ Grafiskt låter vi x -axeln vara vertikal och t -axeln horisontell.

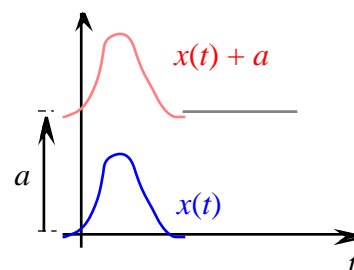
1 Translation i horisontell led, $x(t - a)$

Om $x(t)$ förskjuts a enheter i t -axelriktningen, så får man grafen för $x(t - a)$.



2 Translation i vertikal led, $x(t) + a$

Om grafen för $x(t)$ förskjuts a enheter i x -axelriktningen, så får man grafen för $x(t) + a$.

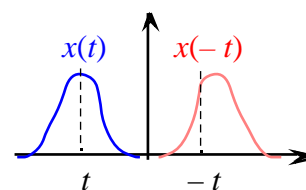


3 Spegling i vertikala axeln, $x(-t)$

Om grafen för $x(t)$ speglas i x -axeln, så får man grafen för $x(-t)$. Funktioner vars grafer övergår i sig själva vid en sådan spegling kallas *jämna funktioner*. Analytiskt:

$$x(t) \text{ jämn} \quad x(t) = x(-t). \quad (2.1)$$

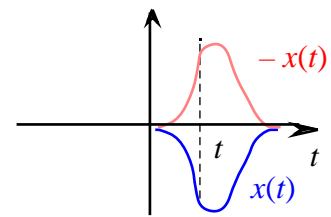
Exempel på jämna funktioner: 1 , t^2 , t^n där n ett jämnt heltal, $\cos t$, $\sin^2 t$, $|t|$ och $\frac{\sin t}{t}$.



¹⁵ I själva verket räcker funktionsbegreppet, så som det brukar definieras t.ex. i 1:ans grundkurser, inte riktigt för signalteorins behov, men det problemet tar vi upp först senare.

4 Spegling i horisontella axeln, $-x(t)$

Om grafen för $x(t)$ speglas i t -axeln, så får man grafen för $-x(t)$.



5 Vridning ett halvt varv kring origo, $-x(-t)$

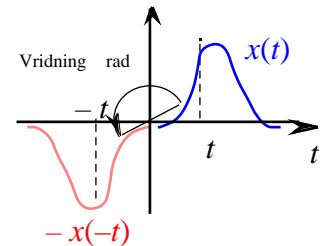
Om grafen för $x(t)$ vrids ett halvt varv kring punkten $(0,0)$ i tx -planet, så får man grafen för $-x(-t)$.

Funktioner vars grafer övergår i sig själva vid en sådan vridning kallas *udda funktioner*. Analytiskt:

$$x(t) \text{ udda} \quad -x(t) = x(-t). \quad (2.2)$$

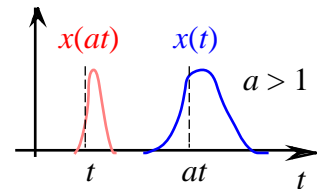
Exempel på udda funktioner: t, t^3, t^n där n ett udda heltal,

$$\sin t, \tan t, \operatorname{sign} t = \frac{t}{|t|}$$



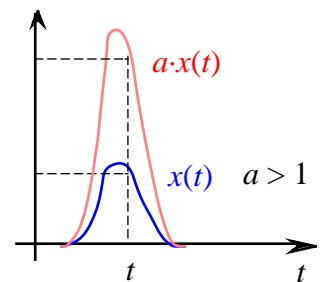
6 Skalning i horisontell led, $x(at)$

Om grafen för $x(t)$ trycks ihop (resp. töjs) så att avstånden till x -axeln blir $\frac{1}{a}$ ggr mindre ($a > 1$) resp. större ($0 < a < 1$), så får man grafen för $x(at)$,



7 Skalning i vertikal led, $a \cdot x(t)$

Om grafen för $x(t)$ töjs (resp. trycks ihop) så att avstånden till t -axeln blir a ggr större ($a > 1$) resp. mindre ($0 < a < 1$), så får man grafen för $a \cdot x(t)$.

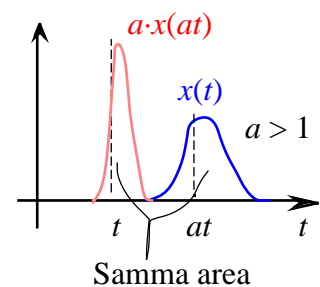


8 Areabevarande skalning, $a \cdot x(at)$

Grafen för $a \cdot x(at)$, $a > 1$, erhålls genom att grafen för $x(t)$ trycks ihop i t -led och töjs i x -led. "Areorna" mellan graferna och t -axeln är då densamma i båda fallen, ty

$$a \cdot x(at) dt = \text{Subst } at \quad t = \quad x(t) dt.$$

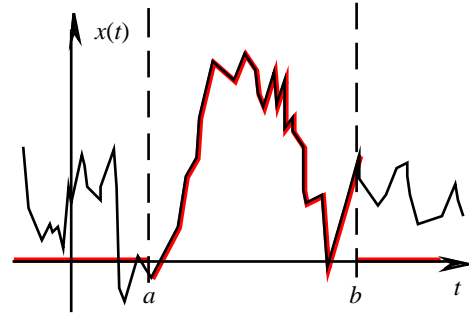
(Detsamma gäller om $0 < a < 1$, men då är det fråga om töjning i t -led och hoptryckning x -led.)



9 Trunkering¹⁶. Rektangelfunktioner

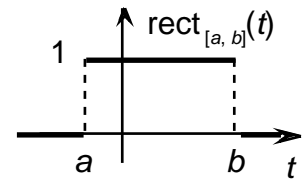
Om en signal iakttas under ett kortare tidsintervall än sin totala varaktighet, så har man att göra med en trunkerad signal. I figuren här bredvid har man ”skurit ut” den del (**fet linje**) av signalgrafnen $x(t)$ (tunn linje) som ligger i intervallet $a < t < b$ och ”glömt” den del som ligger utanför intervallet. Analytiskt kan man beskriva detta genom att införa den ”trunkerade” funktionen:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & \text{då } a < t < b, \\ 0, & \text{då } t > b \text{ eller } t < a. \end{cases} \quad (17)$$



Ofta vill man dock så långt möjligt undvika att använda klammersymbolen. Man kan få en mera koncis beskrivning av den trunkerade funktionen genom att till menageriet av standardformler foga s.k. *rektangelfunktioner*:

$$\text{Om } a < b \quad \text{rect}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } a < t < b, \\ 0, & \text{då } t > b \text{ eller } t < a. \end{cases}$$



Den trunkerade funktionen ges då av

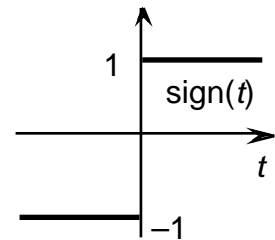
$$x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}_{[a,b]}(t).$$

Rektangelfunktionerna hör till de *sträckvis konstanta* funktionerna och är nära släkt med två andra sådana funktioner, som också fått något så när vedertagna namn:

Signumfunktionen:

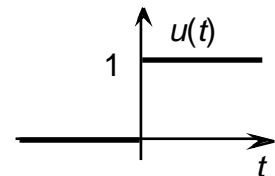
$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 < t, \\ -1, & \text{då } t < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

(Skrivningen $\text{sgn}(t)$ används också.)



Enhetsprånget, (”the unit-step-function”, stegfunktionen, Heavisides funktion¹⁸)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 < t, \\ 0, & \text{då } t < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$



Man har att

$$\text{sign}(t) = 2u(t) - 1, \quad u(t) = \frac{\text{sign}(t) + 1}{2},$$

och om $a < b$ $\text{rect}_{[a,b]}(t) = u(t-a) - u(t-b) = u(t-a) \cdot u(b-t)$. (Kontrollera detta!)

¹⁶ Ordet betyder ”avhuggning” och kommer ursprungligen från det latinska verbet för ”hugga av”, *trunco*. På engelska heter det *truncation*.

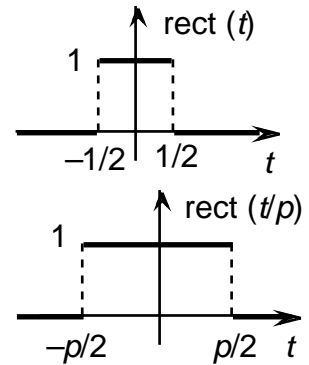
¹⁷ Den nogranne undrar kanske vad som händer med x :s värden för $t = a$ och b . Det problemet (som egentligen inte är något problem) kommenteras närmare längre fram.

¹⁸ Efter *Oliver Heaviside*, brittisk fysiker och ingenjör, 1850 – 1925. Införde funktionen ifråga vid sina kalkyler inom elläran. Beteckningen för den är tyvärr inte standardiserad (än?). I amerikansk litteratur skrivs som ovan ofta u . En annan vanlig beteckning är H , medan uppslagsverket använder sig av !

Vi använder också beteckningen

$\text{rect}(t)$ för $\text{rect}_{[-1/2, 1/2]}(t)$, d.v.s. för rektangelfunktionen som är = 1 i ett intervall av längd 1, symmetriskt beläget kring origo. Funktionen i fråga är jämn.

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases} \quad (2.5)$$



Övningar till kapitel 2:

2.1 Skissera i samma diagram graferna till:

a. $\sin t$, $\sin 2t$ och $\sin \frac{t}{2}$, b. $\sin t$, $2 \sin t$ och $\frac{1}{2} \sin t$.

2.2 a. Skissera grafen till

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t - 1|, & \text{då } 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{då } t > 2 \text{ eller } t < 0 \end{cases} \quad (*)$$

och skissera sedan graferna för

- b. $y(t) = x(-t)$, c. $y(t) = -x(t)$, d. $y(t) = -x(-t)$, e. $y(t) = x(2t)$,
 f. $y(t) = x(t/2)$, g. $y(t) = x(t + 1)$, h. $y(t) = 10 x(10t)$, i. $y(t) = (x(t))^{100}$
 j. Ge en "formelbeskrivning" i samma stil som (*) för funktionen $y(t) = x(2t)$.

2.3 a. Verifiera att $y(t) = x(t) + x(-t)$ är en jämn och att $z(t) = x(t) - x(-t)$ är en udda funktion.

- b. Eftersom $x(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2}$, så kan tydligen varje funktion skrivas som en summa av en jämn och en udda funktion. Visa att det bara finns en sådan omskrivning, d.v.s. om $x(t) = x_j(t) + x_u(t)$, där x_j är jämn och x_u udda, (**)
 så är $x_j(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$ och $x_u(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$.

Ledning: Kombinera likheten (**) med den man får då t byts mot $-t$.

Funktionerna x_j och x_u i uppgift 2.3b. brukar kallas den *jämna* respektive *udda delen* av funktionen x .

De betecknas ibland $\mathcal{E}\nu\{x(t)\}$ respektive $\mathcal{O}\acute{d}\{x(t)\}$.

2.4 Vilka är de jämna respektive udda delarna till

a. e^t , b. e^{it} , c. $\frac{1}{1-t}$.

2.5 Verifiera att

a. $\text{rect}_{[-L/2, L/2]}(t) = \text{rect}(t/L)$, b. $\text{rect}_{[a, b]}(t) = \text{rect} \frac{2t - a - b}{2(b - a)}$.

2.6 Skissera graferna för

- a. $\text{sgn}(\sin t)$, b. $\sin(\text{sgn } t)$, c. $(\text{sgn } t)(\sin t)$,
 d. $(\sin t) \cdot \text{sgn}(\sin t)$, e. $u(\sin t)$, f. $\sin(u(t))$,
 g. $u(t) \cdot \sin t$, h. $\text{rect}(2t) - \text{rect } t$, i. $\text{rect}(4t - 3) + \text{rect}(4t + 3)$.

2.7 Om $0 < a < b$, verifiera att

a. $\text{rect}(at) \cdot \text{rect}(bt) = \text{rect}(at)$ b. $u(t - a) \cdot u(t - b) = u(t - b)$,
 c. $\text{rect}(at) - \text{rect}(bt) = \text{rect} \frac{2abt - (a + b)}{b - a} + \text{rect} \frac{2abt + (a + b)}{b - a}$.

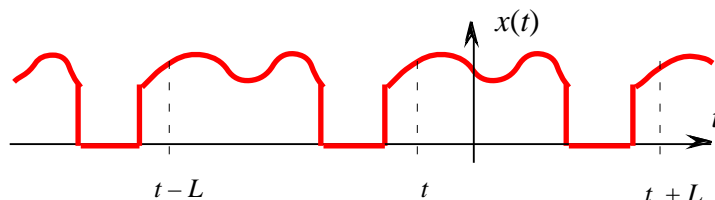
(Rita figur! Jämför med 2.6h och i.)

3. Om periodiska funktioner och periodisk fortsättning

Man säger att en funktion $x(t)$ är *periodisk*: med *periodlängd* L (eller kortare L -periodisk) om

$$L > 0 \text{ och } x(t + L) = x(t) \text{ för alla } t.$$

Graferna för sådana funktioner karakteriseras tydligen (jämför §2.1 ovan) av att de övergår i sig själva då de förskjuts $L, 2L, 3L, \dots$ längdenheter i åt vänster eller höger.

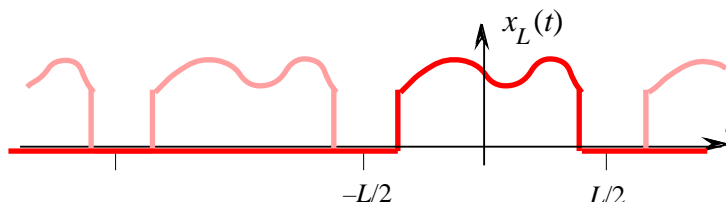


Välkända exempel på periodiska funktioner är de trigonometriska funktionerna $\cos t$ och $\sin t$ (2π -periodiska), samt $\tan x$ och $\cot x$ (π -periodiska). Mera udda exempel utgör konstanterna, $x(t) = C$, som tydligen är L -periodiska för vilket L som helst.

Om en funktion är L -periodisk så är den automatiskt också $2L$ -periodisk, $3L$ -periodisk, $4L$ -periodisk o.s.v. – exempelvis är $\tan t$ också 2π -periodisk. Bortsett från de konstanta funktionerna, så kan man visa att det i alla i praktiken intressanta fall alltid finns en *minsta positiv* period till varje periodisk funktion.¹⁹ Den periodlängden kallas *fundamentalperioden*. För de trigonometriska funktionerna i det föregående stycket angavs just deras fundamentalperioder. Konstanterna har ingen fundamentalperiod.

Övningar: 3.1, 3.2, sid.23.

Om man från grafen till en L -periodisk funktion ersätter allt som ligger utanför ett t -intervall med längden L , t.ex. intervallet $-L/2 < t < L/2$, med motsvarande del av t -axeln så kan man säga att man har "skurit ut" en period av grafen,



Analytiskt kan man beskriva denna "stympling" med, att man bildar funktionen

$$x_L(t) = \begin{cases} x(t), & \text{om } -L/2 < t < L/2, \\ 0, & \text{för alla övriga } t. \end{cases} = x(t) \cdot \text{rect}(t/L).$$

Man säger att $x(t)$ är den L -periodiska *fortsättningen* till $x_L(t)$. Funktionen $x(t)$ kan återskapas från $x_L(t)$ genom att man adderar funktionerna $x_L(t - nL), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L(t - nL). \quad (3.1)$$

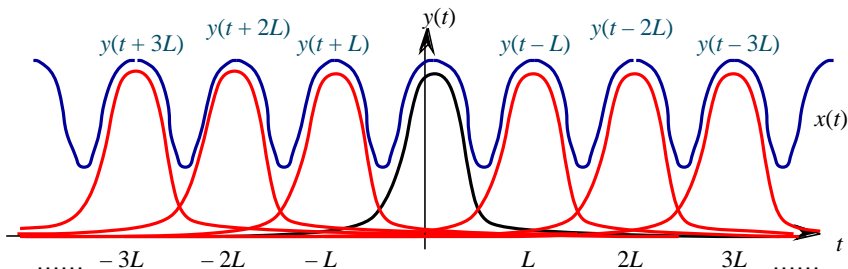
Lägg märke till att en funktion $x(t)$ som är definierad av ett samband av typen (3.1) alltid är L -periodisk – och detta alldeles oavsett vilken funktion x_L man utgår ifrån – bara den oändliga serien konvergerar.

Mera generellt har man kommit överens om:

¹⁹ Mera precist gäller: Om en icke-konstant funktion $x(t)$ är periodisk och kontinuerlig i åtminstone en punkt så har funktionen en minsta positiv period som alla andra är heltalsmultipler av. Beviset för detta är inte alldeles enkelt och utelämnas.

Definition: (Periodisk: fortsättning av funktion)

Funktionen $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nL)$
 sägs vara den L -periodiska fortsättningen av funktionen $y(t)$ – förutsatt att serien är konvergent.

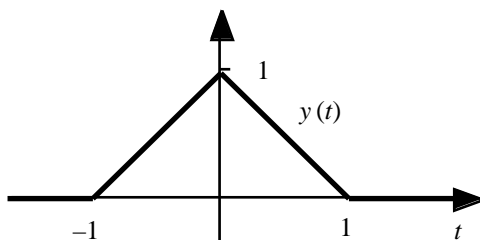


Exempel 3.1

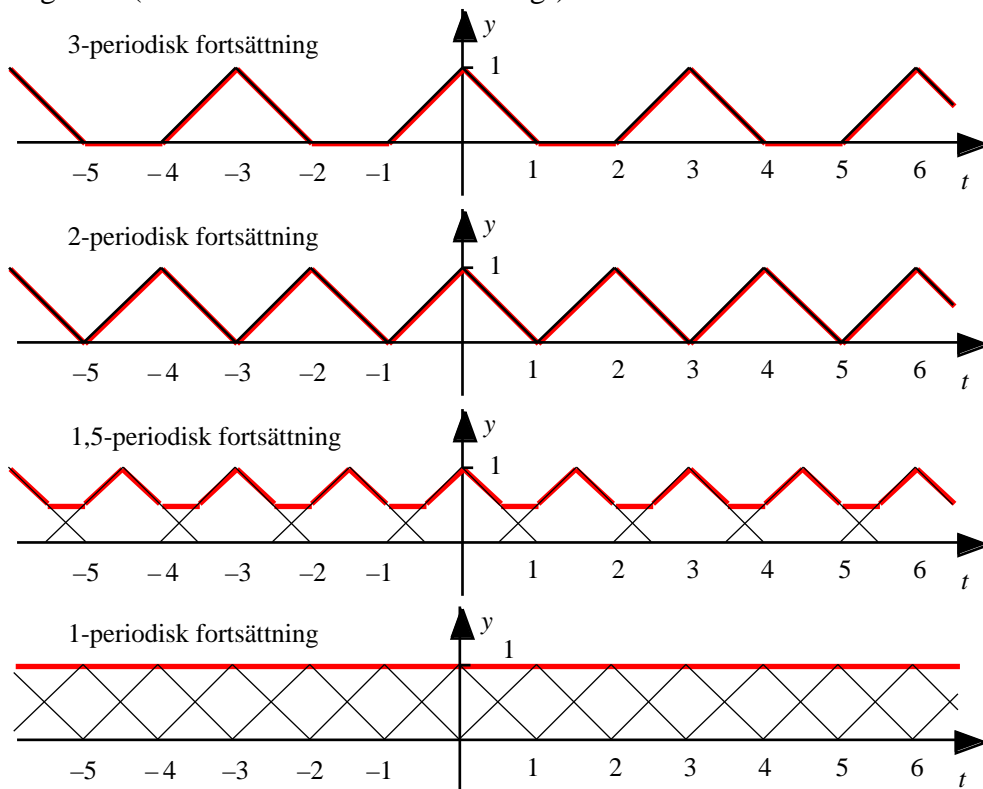
Grafen av funktionen

$$y(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{då } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{då } |t| > 1, \end{cases}$$

har skissats i figuren här bredvid.



De L -periodiska fortsättningarna till denna för $L = 3, 2, 3/2,$ och 1 har då följande grafer: (Kontrollera detta som en övning!)



Övningar till kapitel 3

3.1 Bestäm fundamentalperioderna till

- a. $\cos t \sin t,$ b. $|\cos t|,$ c. $\tan t.$

3.2 Verifiera att $x(t) = t - [t]$, där $[t]$ = största heltalet $\leq t$, är periodisk och ange dess fundamentalperiod.

3.3 Skriv upp analytiska uttryck för de 3-, 2- och 1,5-periodiska fortsättningarna i exemplet ovan. Välj att göra detta i intervall symmetriska kring origo och med respektive fundamentalperiods längd.

3.4 Skissera den 3-periodiska fortsättningen till

$$x(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{då } |t| \leq 1, \\ |t| - 1, & \text{då } 1 < |t| \leq 2, \\ 0, & \text{då } |t| > 2. \end{cases}$$

3.5 Vilken är den 1-periodiska fortsättningen av

$$x(t) = \begin{cases} 2^{-t}, & \text{då } t > 0, \\ 0, & \text{då } t \leq 0, \end{cases}$$

i fundamentalintervallet $0 < t \leq 1$?

Ledning: $1 + k + k^2 + \dots + k^n + \dots = 1/(1 - k)$ om $|k| < 1$.

4. Om matematisk beskrivning av signaler

4.1. Informell inledning. -funktioner och generaliserade funktioner

En ”signal” är för oss ett samlingsnamn på någon mätbar storhet som beror på en reell variabel (ofta med tidsdimension).

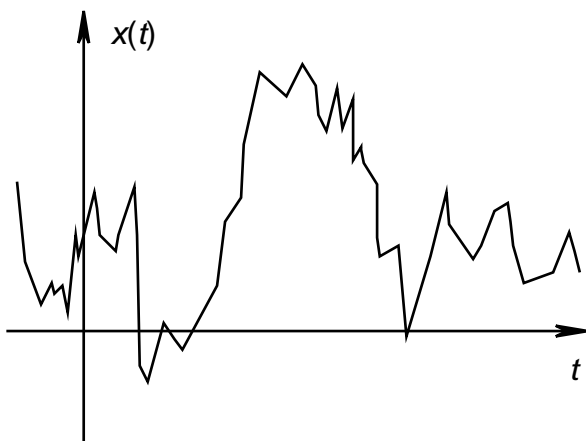
Exempelvis:

- [1] ett varierande lufttryck vid någon punkt i rummet (ljusignal),
- [2] ett varierande strömstyrka (eller spänning) i en elektrisk ledning (telefonsignal),
- [3] ett varierande elektromagnetiskt fält i en viss punkt i rummet (radiosignal, ljussignal),

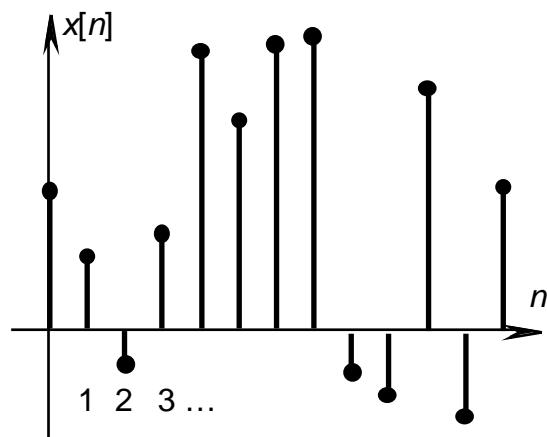
I dessa fall har man vid varje tidpunkt t en signalstyrka x och det är naturligt att försöka beskriva signalen med en funktion $x(t)$ av den *reella* variabeln t . Sådana signaler brukar kallas *tidskontinuerliga*.

- [4] en följd av tal eller tecken (från något alfabet) som kommer med ett visst antal per sekund (digital signal).

Signaler av det senare slaget brukar kallas *tidsdiskreta*. Eftersom ett antal tecken alltid kan ”kodas” med tal så kan en sådan signal alltid beskrivas matematiskt som en talföljd. Om de olika tecknen inkommer vid tidpunkterna $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$, kan man skriva t.ex $x(0), x(T), x(2T), \dots, x(nT), \dots$, för den talföljden. Om ”steglängden” T är känd eller ointressant kan man lika gärna beteckna $x(nT)$ med x_n , eller, som det är kutym i signalteoretiska skrifter, med $x[n]$. Klammerparentesen skall påminna om att n är en *heltalsvariabel* i motsats till den *reella variabeln* t i $x(t)$.

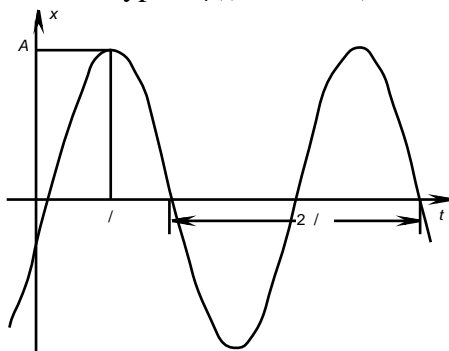


Tidskontinuerlig reell signal



Tidsdiskret reell signal

Intensitetsvariabeln x uppfattar man kanske gärna också som en reell variabel, men det har visat sig lämpligt att i allmänhet låta den vara en *komplex* storhet: En ideal växelström beskrivs exempelvis egentligen av en funktion av av typen $x_r(t) = A \cos(\omega t - \phi)$, där $\omega/2\pi$ är frekvensen, ϕ fasvinkeln och



A amplituden, men man föredrar att uppfatta signalen som en linjär kombination av komplexa exponentialfunktioner:

$$x(t) = \frac{Ae^{-i\phi}}{2} e^{i\omega t} + \frac{Ae^{i\phi}}{2} e^{-i\omega t}$$

En viktig anledning till det speciella intresset för just de komplexa exponentialfunktionerna är den roll de spelar som egenfunktioner till LTI-system (se (1.21) i avsnitt 1.4) och att (oändliga) linjärkombinationer av dem kan framställa vilka som helst signaler (syntesekvationen (1.5) för fourierintegraler).

Som *ett första försök* till en generell matematisk modell för signaler skulle man kunna ta:

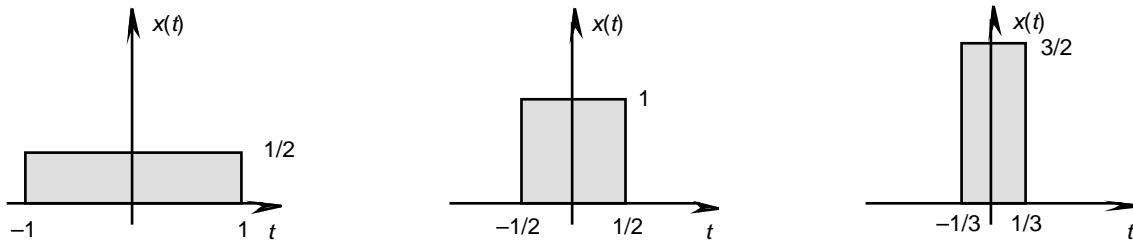
- [a] En tidskontinuerlig signal motsvaras alltid av någon komplexvärd funktion $x(t)$ av en reell variabel t .
- [b] En tidsdiskret signal motsvaras alltid av någon följd av komplexa tal, $x[n]$, n heltal.

Det har dock visat sig att [a]-delen är alltför inskränkande för att täcka behoven – somliga signaler har just ingen varaktighet utan kommer som en ”impuls” på ”nolltid”. En sådan signal låter sig inte beskrivas av någon funktion, i varje fall inte som begreppet ”funktion” definierats i den ”klassiska” analysen. Innan vi modifierar [a] på ett passande sätt måste vi därför diskutera denna typ av signaler litet närmare.

Med *impulsen* hos en tidskontinuerlig signal $x(t)$ av typen [a] under tidsintervallet $a < t < b$ menar man värdet av integralen

$$\int_a^b x(t) dt. \quad (4.1)$$

Om $x(t) = 0$ utanför intervallet $a < t < b$ så är värdet av integralen (4.1) dess *totala impuls*.

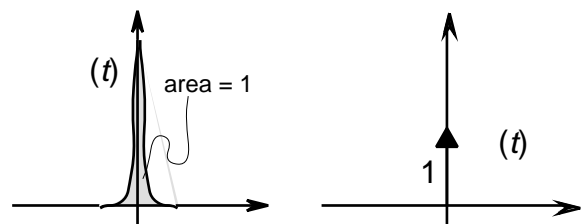


Signalerna $x(t)$ med grafer som i figurerna ovan har alla samma totala impuls 1, men olika varaktighet (2, 1 resp 2/3 tidsenheter). Med *signalens varaktighet* menas då längden av det kortaste intervall utanför vilket den är 0.

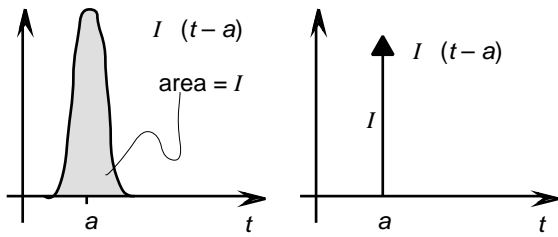
För att smidigt kunna hantera signaler med mycket kort varaktighet, men med total impuls $\neq 0$ har man inom matematikens skapad därtill speciellt anpassade begrepp – de så kallade *generaliserade funktionerna* eller *distributionerna*. En strikt matematisk definition av dessa skulle föra oss för långt bort från den här kursens önskade innehåll, så vi nöjer oss med en mera intuitiv beskrivning av dem.

En signal som kommer vid tiden $t = 0$ med total impuls 1 och varaktighet 0 motsvaras av den så kallade *deltafunktionen* $\delta(t)$.

Approximativt svarar signalen mot en puls som den i den vänstra figuren här bredvid och $\delta(t)$ -funktionen själv kan gärna illustreras grafiskt som i den högra figuren med en uppåtriktad pil utgående från origo med längd 1.



²⁰ Ordet ”impuls” får inte alltid tas bokstavligt i fysikalisk mening (något med dimensionen kraft \times tid) – för t.ex. en elektrisk signal, där x betecknar strömstyrkan, så kommer ”impulsen” att vara den laddningsmängd som passerat under tidsintervallet.



På motsvarande sätt kommer en impuls av storleken I , som kommer vid tidpunkten a att motsvaras av den generaliserade funktionen

$$I \cdot \delta(t - a)$$

Vi kallar dessa signaltyper *deltapulser*²¹. Punkten a kallas pulsens *singularitet*. Man överenskommer vidare att $\delta(t - a) = 0$ då $t \neq a$ och *saknar* värde då $t = a$.

Observera att δ -pulserna inte är några funktioner i ”vanlig” mening! För en ”vanlig” funktion $x(t)$ som är

$= 0$ då $t \neq 0$, så är $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$, medan det för δ -pulsen förväntas gälla att $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 1$.

δ -pulsen är alltså en ”nytt” sorts begrepp – en *generaliserad funktion*.

Litet slarvigt (men träffande) kan man säga att

[a] *tidskontinuerliga signaler är, matematiskt sett, uppbyggda av summor av funktioner av en variabel och deltapulser samt deras derivator*²².

Övning: 4.1, sid. 36.

Innan vi går vidare med signalteorin måste vi titta litet närmare på

4.2 Egenskaper hos generaliserade funktioner och hur man räknar med dem²³

4.2.1. Integration av δ -pulser

Deltapulserna kan integreras över intervall där ändpunkterna är den singulära punkten:

Betrakta t.ex. pulsen $\delta(t)$. Om $b < t < c$ är ett intervall som har den singulära punkten $t = 0$ i sitt inre, så kommer de signaler $x(t)$ som approximerar $\delta(t)$ och har tillräckligt kort varaktighet, att vara $\neq 0$ bara i en del

av detta intervall. Eftersom man då har att $\int_b^c x(t) dt = 1$, så är också $\int_b^c \delta(t) dt = 1$.

Om å andra sidan punkten $t=0$ ligger utanför intervallet, så är $x(t) = 0$ i intervallet, dvs. $\int_b^c x(t) dt = 0$, varför

också $\int_b^c \delta(t) dt = 0$. På motsvarande sätt får man att

²¹ De kallas också *Diracpulser* (eller *Diracfunktioner*) efter den engelske fysikern och Nobelpristagaren *Paul Dirac* (1902 – 1984).

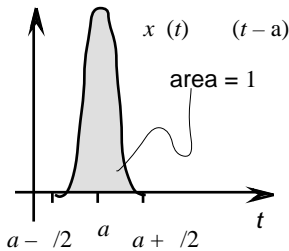
²² Vi kommer till vad dessa är nedan (§4.2.6).

²³ Resonemangen i det här avsnittet är heuristiska. (Heuristik = Metod att upptäcka eller bilda ny kunskap.) Några strikta bevis för sambanden i detta avsnitt kan inte ges här, eftersom vi inte har någon en formell definition av vad ”generaliserade funktioner” är för något att utgå ifrån.

$$\int_b^c (t-a) dt = \begin{cases} 1, & \text{om } a \text{ är inre punkt i integrationsintervallet,} \\ 0, & \text{om } a \text{ är yttre punkt till integrationsintervallet.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Övning: 4.2, sid. 36.

4.2.2. Multiplikation med δ -pulser



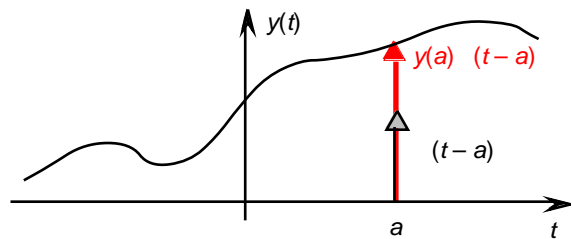
Låt $x(t)$ vara en funktion som approximerar $\delta(t-a)$ och som har en kort varaktighet, d.v.s.

$$x(t) = 0, \text{ då } |t-a| > 1/2 \text{ och} \\ \int_b^c x(t) dt = 1 \text{ om } b = a - 1/2, a + 1/2 = c.$$

Om nu $y(t)$ är en funktion som är *kontinuerlig* i $x = a$, så är för små ϵ , $y(t) \approx y(a)$ då $|t-a| < \epsilon/2$. Detta innebär att $y(t) \cdot x(t) \approx y(a) \cdot x(t)$ för alla dessa t och approximationen kan förväntas bli bättre och bättre ju mindre ϵ är. Låter man $\epsilon \rightarrow 0+$ får man

$$y(t) \cdot \delta(t-a) = y(a) \cdot \delta(t-a) \quad (4.3)$$

Uttrycket $y(a) \cdot \delta(t-a)$ kan uppfattas som en modell för en avläsning av y 's värde i $t = a$ - man *samplear* y vid "tidpunkten" a .



Av (4.3) får man också att $\int_b^c y(t) \cdot \delta(t-a) dt =$

$$\int_b^c y(a) \cdot \delta(t-a) dt = y(a) \int_b^c \delta(t-a) dt, \text{ dvs enligt (4.2):}$$

$$\int_b^c y(t) \cdot \delta(t-a) dt = \begin{cases} y(a), & \text{om } b < a < c \text{ och } y(t) \text{ är kontinuerlig i } t = a, \\ 0, & \text{om } a \text{ ligger utanför intervallet } b < t < c. \end{cases} \quad (4.4)$$

Anmärkning: Förfarandet förutsätter att den funktion $y(t)$ som man multiplicerar med är kontinuerlig i δ -pulsens singularitet. Vi väljer att inte definiera multiplikation med andra funktioner y än dessa! Detta verkar kanske litet ofullständigt men är egentligen inget konstigt. Jämför med matricmultiplikationen som heller inte är definierad mellan godtyckliga matriser utan bara för sådana som har passande format.

Som en övning (nr. 4.3, sid. 36) lämnas att verifiera att
att för kontinuerliga funktioner $y(t)$ gäller

$$\int_a^t y(a) \cdot (t-a) da = \int_a^t y(a) \cdot (a-t) da = y(t).$$

Den sista relationen utsäger att δ -funktionen, när det gäller faltning, agerar analogt med talet 1 vidmultiplikation – när man ”multiplikerar” (läs: faltar) med den så ”händer ingenting”. Definitionerna av de generaliserade funktionerna och av faltningen kan göras så att relationen

$$y(t) * \delta(t) = y(t)$$

gäller för alla generaliserade funktioner $y(t)$ (alltså även för dem som inte är kontinuerliga).

4.2.3. Linearitet vid integration

Integrationsreglerna för generaliserade funktioner är i mångt och mycket desamma som för de ”vanliga” envariabelfunktionerna. Man har exempelvis att

$$\int_b^c (kx(t) + ly(t)) dt = k \int_b^c x(t) dt + l \int_b^c y(t) dt, \quad (4.5)$$

där k och l är konstanter, också gäller för generaliserade funktioner $x(t)$ och $y(t)$.

Exempel 4.1:

Om $x(t) = \sin t + 3 \cos t$ och $y(t) = (t+1) - t$, så är

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 x(t) \cdot y(t) dt &= \int_{-2}^3 ((\sin t + 3 \cos t) (t+1) - (\sin t + 3 \cos t) t) dt = \text{Enligt (4.5)} \\ &= \int_{-2}^3 (\sin t + 3 \cos t) (t+1) dt - \int_{-2}^3 (\sin t + 3 \cos t) t dt = \text{Enligt (4.4)} \\ &= \left[(\sin t + 3 \cos t) \right]_{t=-1}^{-2} - \left[(\sin t + 3 \cos t) \right]_{t=0}^{-2} = [0 + 3 \cdot (-1)] - [0 + 3 \cdot 1] = -6. \end{aligned}$$

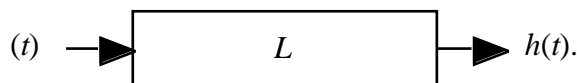
Övning: 4.4, sid. 36.

Också substitutionsregeln för integration gäller oförändrad för linjära substitutioner ($t = a + b$). Exempelvis har man för konstanter $a > 0$:

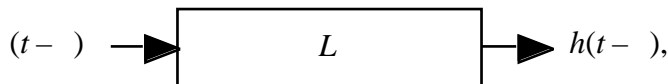
$$\int (at) dt = at = \dots, dt = d/a, t \pm \dots = \frac{1}{a} \dots \left(\dots \right) (/a)d = \frac{(0)}{a}.$$

4.2.4. δ -funktionen och LTI-system

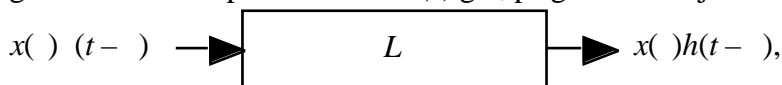
Hos LTI-systemen spelar δ -funktionen också en viktig roll: Låt $h(t)$ vara utsignalen till ett LTI-system då δ -funktionen valts som insignal (h kan lämpligen kallas *pulssvaret*):



Då kommer, på grund av tidsinvariansen



där τ är ett godtyckligt reellt tal. Multiplikation med $x(\tau)$ ger, på grund av linjariteten

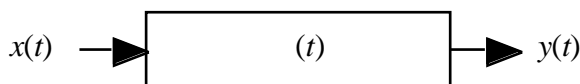


Integreras ("linjärkombineras") detta med avseende på τ , så får man



och vi får det som påstods i (1.22) i det inledande avsnittet om LTI-system.

δ -funktionen kan också uppträda som pulssvarsfunktion till ett LTI-system:

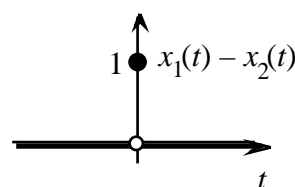
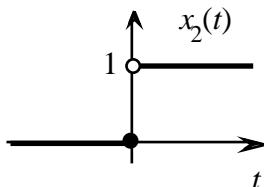
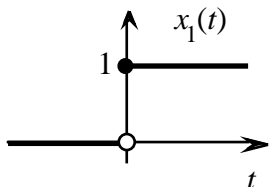


Här är $y(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$, dvs. systemet är det "triviala" system där utsignalen är identisk med insignalen.

Övning: 4.5, sid. 36.

4.2.5. Likhet mellan generaliserade funktioner. Skalning av δ -funktionen

Funktionerna $x_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0 \\ 0, & \text{om } t < 0 \end{cases}$ och $x_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0 \\ 0, & \text{om } t < 0 \end{cases}$ är inte identiska eftersom $x_1(0) \neq x_2(0)$.



Men om de däremot är beskrivningar på signaler finns det ingen anledning att betrakta dem som olika eftersom skillnaden inte går att detektera med några fysikaliska instrument. Man överenskommer bl.a. därför att betrakta två generaliserade funktioner (signaler) $x_1(t)$ och $x_2(t)$ som lika om

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x_1(t) - x_2(t)) \delta(t) dt = 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) \delta(t) dt$$

för godtyckliga (tillräckligt regulära) funktioner $x(t)$.

Exempelvis har man enligt det föregående avsnittet att

$$\int_{-\infty}^{\infty} (at) \delta(t) dt = \frac{(0)}{a} = \frac{(t)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt$$

för "godtyckliga" funktioner $x(t)$. D.v.s.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (at) \delta(t) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} t \delta(t) dt \quad (4.6)$$

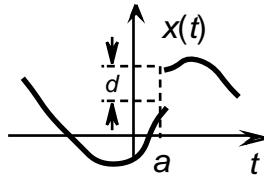
Övning: 4.6, sid. 36.

$$\boxed{u'(t) = \delta(t)} \quad (4.8)$$

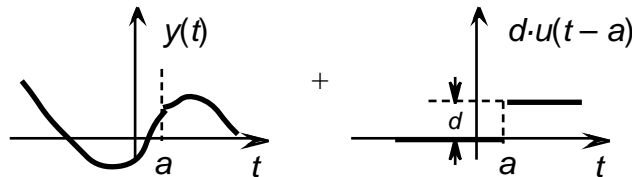
Med detta generaliserade derivatabegrepp kommer likheten (4.6) att vara giltig även för funktionen $u(t)$:

$$\int_{-1}^t u'(t) dt = \int_{-1}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases} = u(t) - u(-1).$$

På motsvarande sätt kan man generaliserat derivera funktioner vars grafer består av styckvis släta kurvor så när som på isolerade språng. En funktion med en graf som



kan nämligen uppfattas som summan av två funktioner:



där den ena, $y(t)$, är deriverbar utom möjligen för $t = a$ men i varje fall kontinuerlig också då $t = a$, och den andra $d \cdot u(t - a)$ är en multipel av en stegfunktion. Man sätter därför

$$x'(t) = y'(t) + d \cdot \delta(t - a).$$

Mera allmänt om $x(t)$ är en sträckvis deriverbar funktion med språngdiskontinuiteter d_1, d_2, \dots i punkterna a_1, a_2, \dots , så är

generaliserade derivatan av $x(t) =$ "klassiska" derivatan av $x(t) + d_1 (t - a_1) + d_2 (t - a_2) + \dots$

Exempel 4.3:

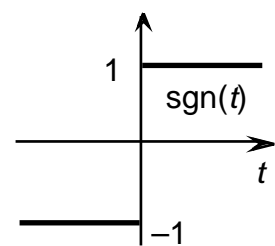
Signumfunktionen är liksom enhetsprånget en sträckvis konstant funktion. Den har ett språng av storleken $+2$ i origo. Alltså:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \text{sign}(t) = 2 \delta(t)}$$

Samma resultat får man (förstås) om man deriverar relationen:

$$\text{sign}(t) = 2 u(t) - 1$$

med hjälp av de vanliga deriveringsreglerna.

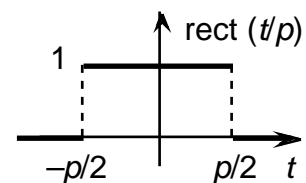


För den sträckvis konstanta funktionen

$$\text{rect}(t/p) = u(t + p/2) - u(t - p/2)$$

gäller på motsvarande sätt

$$\boxed{\frac{d}{dt} \text{rect}(t/p) = \delta(t + p/2) - \delta(t - p/2)}$$

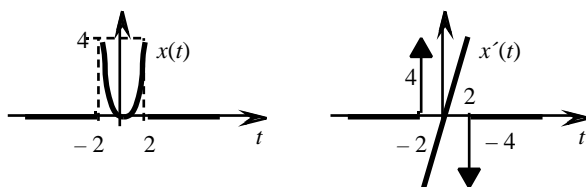


Exempel 4.4:

Problem: Beräkna den generaliserade derivatan till $x(t) = \begin{cases} t^2, & \text{om } |t| < 2, \\ 0, & \text{om } |t| > 2, \end{cases}$

Lösning: Funktionen $x(t)$ är deriverbar i klassisk mening då $t \neq \pm 2$, men har språngdiskontinuiteter i dessa punkter med språng $+4$ resp. -4 . Den generaliserade derivatan ges därför av

$$x'(t) = \begin{cases} 2t, & \text{om } |t| < 2, \\ 0, & \text{om } |t| > 2, \end{cases} + 4 \delta(t+2) - 4 \delta(t-2).$$



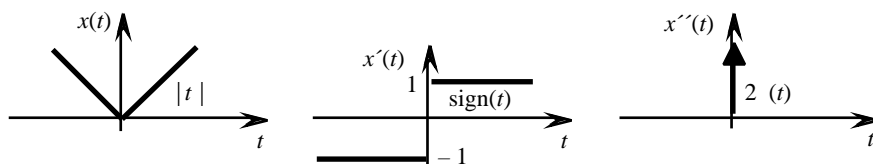
Om vi behöver skilja på den klassiska derivatan från den generaliserade skriver vi i fortsättningen $\{x'(t)\}$ eller $\frac{dx}{dt}$ för den klassiska, medan samma symboler utan $\{\}$ -tecknen får stå för den generaliserade.²⁴ Högre generaliserade derivator beräknas efter samma mönster.

Exempel 4.5:

Problem: Beräkna $x''(t)$ då $x(t) = |t|$.

Lösning: Man har $x'(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } t > 0, \\ -1 & \text{om } t < 0. \end{cases} = \text{sign}(t)$, som är sträckvis konstant, med ett språng av storleken $+2$ för $t = 0$. Alltså är

$$x''(t) = \{x'(t)\} + 2 \delta(t) = 2 \delta(t).$$

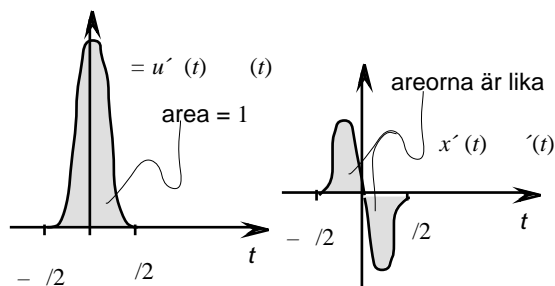


Övningar: 4.7 – 4.10, sid. 36.

4.2.7. Derivering av δ -pulser

Tanken att generaliserade funktioner approximeras av deriverbara funktioner kan användas för att definiera derivering av generaliserade funktioner. Hur detta fungerar kan man ana av följande skissartade exempel:

Betrakta $u(t)$ -funktionen. Den approximeras av deriverbara funktioner $x(t)$ med grafer som i den vänstra figuren. Derivatan $x'(t)$ kommer då att approximeras av $x'(t)$, som, om $x(t)$:s maximum



²⁴ Något allmänt vedertaget beteckningssätt för detta finns veterligen inte (ännu?).

antas för $t = 0$, kommer att ha principutseendet som i den högra figuren. För intervall $b < t < c$ som har intervallet $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ i sitt inre har man:

$$\int_b^c x'(t) dt = x(c) - x(b) = 0 \text{ och, mera allmänt för godtyckliga deriverbara funktioner } y(t):$$

$$\int_b^c y(t) \cdot x'(t) dt = \text{Partiell integration} = \left[y(t) \cdot x(t) \right]_b^c - \int_b^c y'(t) \cdot x(t) dt = 0 - \int_b^c y'(t) \cdot x(t) dt,$$

där den högra ledet $-\int_b^c y'(t) \cdot x(t) dt = -y'(0) \int_b^c x(t) dt$ om $x(0) = 0$. Det vänstra ledet kan uppfattas

som en approximation till $\int_b^c y(t) \cdot x'(t) dt$ och man leds till de relationer som beskriver x' 's väsentligaste egenskaper:

$$\int_b^c y(t) \cdot x'(t) dt = \begin{cases} -y'(0) \int_b^c x(t) dt, & \text{om } b < 0 < c \text{ och } y(t) \text{ har kontinuerlig derivata,} \\ 0, & \text{om } 0 \text{ ligger utanför intervallet } b < t < c. \end{cases} \quad (4.9)$$

Allmännare kan man definiera derivatan för en godtycklig generaliserad funktion så att den vanliga räkneregeln för partiell integration gäller:

$$\int_b^c y(t) \cdot x'(t) dt = \left[y(t) \cdot x(t) \right]_b^c - \int_b^c y'(t) \cdot x(t) dt, \quad (4.10)$$

dock med inskränkningen att funktionerna x och y inte har någon gemensam singularitet och att ändpunkterna b och c inte är singulariteter. Sambandet (4.9) är ett specialfall av (4.10):

$$\int_b^c y(t) \cdot x'(t) dt = \left[y(t) \cdot x(t) \right]_b^c - \int_b^c y'(t) \cdot x(t) dt = \left(y(c) \cdot x(c) - y(b) \cdot x(b) \right) - \int_b^c y'(t) \cdot x(t) dt = -y'(0) \int_b^c x(t) dt. \quad (9')$$

Derivator av godtycklig ordning kan definieras efter samma mönster. Även dessa högre derivator är generaliserade funktioner för vilka räknereglerna ovan gäller. Man har t.ex. för x -funktionens andraderivata och två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner y :

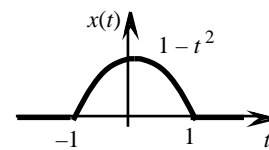
$$\int_b^c y(t) \cdot x''(t) dt = \left[y(t) \cdot x'(t) \right]_b^c - \int_b^c y'(t) \cdot x'(t) dt = \left(y'(c) \cdot x(c) - y'(b) \cdot x(b) \right) - \int_b^c y'(t) \cdot x'(t) dt = (-1)^2 y''(0) \int_b^c x(t) dt. \quad (9'')$$

På samma sätt får man det allmännare

$$\int_b^c y(t) \cdot x^{(n)}(t) dt = (-1)^n y^{(n)}(0) \int_b^c x(t) dt. \quad (4.11)$$

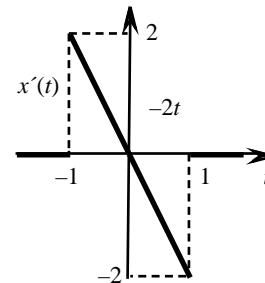
Exempel 4.6:

Problem: Låt $x(t) = 1 - t^2$, om $|t| \leq 1$, $= 0$ för övriga t -värden. Beräkna x' , x'' och x''' .



Lösning: $x(t)$ är kontinuerlig och saknar därför sprängdiskontinuiteter, varav

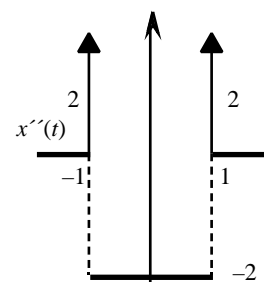
$$x'(t) = \{x'(t)\} = \begin{cases} 0, & \text{om } t < -1, \\ -2t, & \text{om } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{om } t > 1. \end{cases}$$



Denna funktion har språng av storleken $+2$ för $t = -1$ och $t = 1$, men är annars kontinuerlig.

Man får andraderivatan

$$x''(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t < -1, \\ -2, & \text{om } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{om } t > 1. \end{cases} + 2 \delta(t+1) + 2 \delta(t-1) \\ = \{x''(t)\}$$



Den första termen är en sträckvis konstant funktion med språng -2 för $t = -1$ och språng $+2$ för $t = 1$, för övriga t är den deriverbar med derivatan $= 0$. Alltså $\{x'''(t)\} = 0$ då $t \neq \pm 1$ och

$$x'''(t) = -2 \delta(t+1) + 2 \delta(t-1) + 2 \delta'(t+1) + 2 \delta'(t-1).$$

Exempel 4.7:

Problem: Utnyttja resultatet i föregående exempel för att beräkna integralen $\int_{-1}^1 x(t) e^{it} dt$.

Lösning: Eftersom $x(t)$ och dess derivator är $= 0$ utanför intervallet $-1 \leq t \leq 1$ så ger partiell integration

$$\int_{-1}^1 x(t) e^{it} dt = -\frac{1}{i} \int_{-1}^1 x'(t) e^{it} dt = -\frac{1}{i} \int_{-1}^1 x''(t) e^{it} dt = -\frac{1}{i} \int_{-1}^1 x'''(t) e^{it} dt.$$

Resultatet från föregående exempel ger att detta är

$$= -\frac{i}{3} \left(-2 [e^{it}]_{t=-1} + 2 [e^{it}]_{t=1} + 2[-i e^{it}]_{t=-1} + 2[-i e^{it}]_{t=1} \right) = \\ = -\frac{2i}{3} \left(-e^{-i} + e^i - i(e^{-i} + e^i) \right) = \frac{4}{3} (\sin - \cos),$$

där man använt att $e^i - e^{-i} = 2i \sin$ och $e^i + e^{-i} = 2 \cos$.

Övningar till kap. 4:

4.1 Låt $x(t) = \sin t$, då $-1 \leq t \leq 1$ och $= 0$ för övriga t -värden. Rita graferna för

- a. $x(t+1) + (t-2)$, b. $x(t-1) - (t+2)$, c. $\int_{k=-2}^2 k (t-k+1/4)$.

4.2 Beräkna integralerna över intervallet $0 \leq t \leq 3$ för funktionerna i uppgift 4.1.

4.3 Verifiera att för kontinuerliga funktioner $y(t)$ gäller $\int_0^t y(a) \cdot (t-a) da = y(t)$.

(Relationen kan uttryckas: "Varje (kontinuerlig) funktion är 'summan' av sina samplingsar".)
Och uttryckt med hjälp av faltning: $y(t) * (t) = y(t)$

4.4 Låt $y(t)$ vara den generaliserade funktionen i övning 4.1c. Beräkna $\int_{-2}^0 e^{-t} \cdot y(t) dt$.

4.5 Vilken verkan på insignalen har ett LTI-system med pulssvarsfunktion

- a. $2(t)$? b. $(t-a)$, a reell konstant?

4.6 För konstanter $a > 0$ gäller enligt (4.6) att $(at) = \frac{1}{a}(t)$. Vilken likhet får man om $a < 0$?

4.7 Beräkna för $x(t)$ som i exempel 4.4:

$$\int_0^0 dt \quad \int_0^0 dt$$

- a. $\int_{-3}^0 \{x'(t)\} dt$, b. $\int_{-3}^0 x'(t) dt$.

$$\int_{-3}^0 dt \quad \int_{-3}^0 dt$$

4.8 Beräkna den generaliserade derivatan till funktionerna

- a. $\text{sign}(t) \cdot \cos t$,
b. $\text{sign}(t) \cdot \sin t$,
c. $\text{rect}_{[a,b]}(t) = u(t-a) \cdot u(b-t)$, $a < b$, där $u(t) =$ enhetsprånget. (Rita först grafen!)
d. $u(t) \cdot |t-1|$. (Rita först grafen!)

- *e. $1 - e^{(-1/t)}$, då $t > 0$
 0 , då $t < 0$. (Rita först grafen!)

4.9 Beräkna $\frac{d^2}{dt^2} (u(t) \cdot e^t + u(-t) \cdot (1+t))$

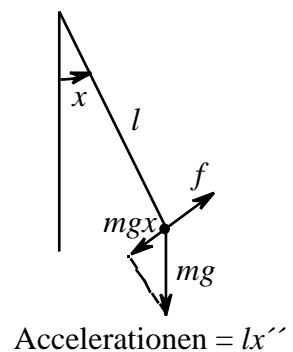
4.10 Låt $x(t) = (u(t) - u(t-2)) \cdot \sin t$.

- a. Verifiera att $x''(t) + x(t) = (t) - (t-2)$.
b. Skissera graferna för $x(t)$, $x'(t)$ och $x''(t)$.
c. En pendlande punktmasa hänger i en viktlös tråd. För små utslagsvinklar $x(t)$ och försumbar friktion gäller då enligt Newtons kraftlagar att:

$$x''(t) + \frac{g}{l} x(t) = \frac{1}{m} f(t),$$

där g är tyngdaccelerationen, l trådens längd och $f(t)$ en yttre kraft som påverkar pendeln. Vilken situation beskrivs av differentialekvationen i a-uppgiften?

Tolka lösningen $x(t) = (u(t) - u(t-2)) \cdot \sin t$ i ljuset av svaret på den frågan.



4.11 Låt $x(t) = |t|$ om $|t| \leq 1$ och $= 0$ för övriga t -värden.

a. Beräkna x' och x'' .

b. Beräkna med hjälp av resultatet i a-uppgiften integralen $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i t} dt$.

4.12 Låt $x(t) = \sin t$ då $|t| \leq \pi$ och $= 0$ för övriga t -värden.

a. Beräkna $x(t) + x''(t)$ på så enkel form som möjligt.

b. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + x''(t)) e^{i t} dt$.

4.13 Låt $x(t) = \cos t$ då $|t| \leq \pi$ och $= 0$ för övriga t -värden.

a. Beräkna $x(t) + x''(t)$ på så enkel form som möjligt.

b. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + x''(t)) e^{i t} dt$.

4.14 Visa att $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i(t-\tau)} d\tau = x'(t)$ om x har en kontinuerlig 1:a-derivata och mera generellt

$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i(n)(t-\tau)} d\tau = x^{(n)}(t)$ om x har en kontinuerlig n :te-derivata.

5. Några viktiga summations- och integrationsformler.

Först en repetition:

5.1. Geometriska serier

För godtyckliga komplexa tal a och k gäller

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = s = \begin{cases} a \frac{1-k^n}{1-k}, & \text{om } k \neq 1, \\ a n, & \text{om } k = 1. \end{cases}$$

Bevis: Om $a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = s$,
så är $ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} + ak^n = ks$,
varav efter subtraktion,

$$a(1-k^n) = (1-k)s = a \frac{1-k^n}{1-k}, \quad (\text{om } k \neq 1).$$

Om $k = 1$, så är s summan av n st tal a , d.v.s. $= na$.

Övningar: 5.1 – 5.5, sid. 43.

De komplexa exponentialfunktionerna av typen $e^{i\omega t}$, där ω och t är reella, tilldrar sig ett speciellt intresse inom signalteorin. Vi skall i de följande avsnitten titta närmare på vissa enkla summor och integraler av sådana funktioner. Det visar sig nämligen att det finns oväntade samband mellan sådana summor och δ -pulserna. Sambanden är hörnstenar inom fourieranalysen.

5.2. Summation av harmoniska vågor ($e^{i\omega t}$ -funktioner), pulståg

5.2.1. En kommentar till vissa variabelval:

Värdet av funktionen $e^{i\omega t}$, där ωt är reellt, är som vi vet ett komplext tal med belopp 1 och med argumentvinkeln ωt mätt i radianer. Om t har tidsdimension så kan man åskådliggöra funktionen som en rörlig pekare fäst i origo i planet. Pekaren snurrar med en vinkelhastighet på ω radianer/sek – moturs om $\omega > 0$. Att man oftast valt just radianmättet som vinkelmått beror bl.a. på att deriveringsformlerna för den komplexa exponentialfunktionen (och därmed sinus- och cosinusfunktionerna) blir speciellt enkla.

Exempelvis är som bekant

$$\frac{d}{dv} \sin v = \cos v, \quad \text{om } v \text{ mäts i radianer,}$$

medan

$$\frac{d}{dv} \sin v^\circ = \frac{\pi}{180} \cos v^\circ, \quad \text{om } v \text{ mäts i grader.}$$

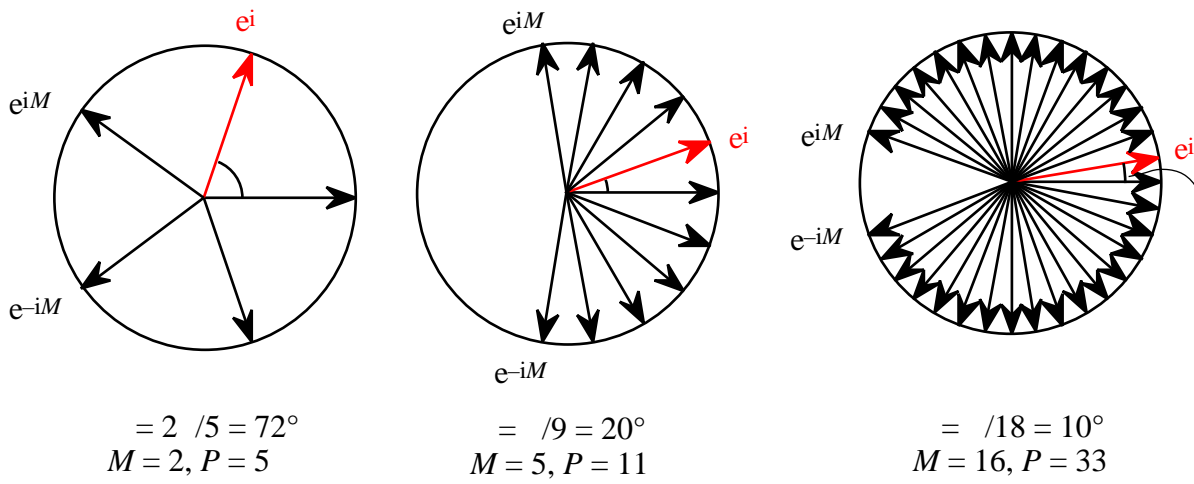
Trots att radianmättet verkar vara ”bäst” i matematiska sammanhang kan det i vissa fall ändå vara fördelaktigt att välja ett annat vinkelmått. Ett ”naturligt” sådant är att ta *ett varv* som enhet. Ett varv motsvarar då 2 radianer respektive 360° . En pekare som roterar f varv/sek (dvs. med frekvensen f Herz) har då en vinkelhastighet på $2\pi f$ radianer/sek. Vi har alltså

$$= 2\pi f.$$

5.2.2. Summation av harmoniska funktioner

Vi tittar nu närmare på summor, $\sum_{n=-M}^M e^{in\omega t}$, av heltalspotenser av $e^{i\omega t}$ -funktioner. I det komplexa talplanet

utgör termerna i summan ett udda antal ($P = 2M + 1$ st) enhetspilar, spegelsymmetriskt placerade kring reella axeln och jämnt fördelade över en sektor av enhetscirkeln. Några exempel finns i figurerna på nästa sida. För att hyfsa formlerna litet har vi satt $t = \frac{2\pi}{\omega}$.



Summan

$$S_P(\theta) = \sum_{n=-M}^M e^{in\theta} = e^{-iM\theta} + e^{-i(M-1)\theta} + \dots + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + \dots + e^{i(M-1)\theta} + e^{iM\theta}$$

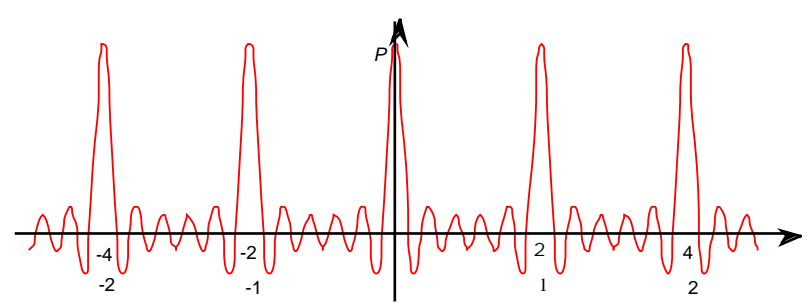
är en geometrisk serie med kvot $e^{i\theta}$, första term $e^{-iM\theta}$ och med P stycken termer, där $P = 2M + 1$. För $e^{i\theta} = 1$ får man därför summan

$$S_P(\theta) = e^{-iM\theta} \frac{e^{i(2M+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{-iM\theta} \cdot \frac{e^{i(2M+1)\theta/2} - e^{-i(2M+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = \frac{e^{iP\theta/2} - e^{-iP\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = \frac{\sin P\theta/2}{\sin \theta/2} \tag{5.1}$$

För $e^{i\theta} = 1$, dvs. när $\theta = 2 \times \text{heltal}$, är summan istället $= P$. Notera att termerna i summan alla är 2π -periodiska i variabeln θ , detsamma gäller då förstås också summan. Väljer man i stället andelen av varvet som vinkelmått, dvs. sätter $\theta = 2\pi x$, så får man istället den 1-periodiska summan:

$$S_P(2\pi x) = \frac{\sin P\pi x}{\sin \pi x} \text{ utom när } x = \text{heltal, då summan} = P.$$

Summan är tydligen alltid reell och som funktion av x (respektive θ) har dess graf principutseendet:



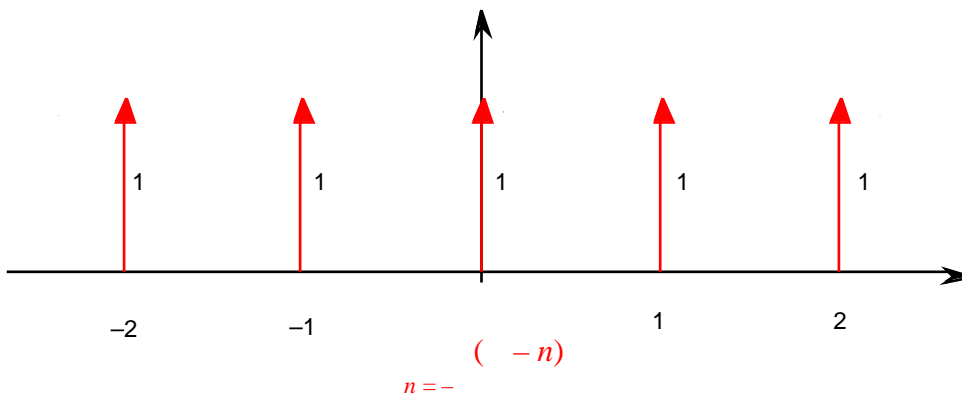
Funktionen är periodisk med periodlängd 1, och dess 0-ställen i intervallet $0 < x < 2$ ($0 < \theta < 2\pi$) är $x = 2/P, 4/P, \dots, 2(P-1)/P$ ($\theta = 2\pi/P, 4\pi/P, \dots, 2\pi(P-1)/P$)⁽²⁵⁾

Man kan visa att

$$\int_a^b S_P(2\pi x) dx \approx \begin{cases} 1, & \text{om intervallet } a < x < b \text{ innehåller precis en heltalspunkt,} \\ 0, & \text{om intervallet } a < x < b \text{ inte innehåller någon heltalspunkt,} \end{cases} \text{ då } P \rightarrow \infty.$$

²⁵ I figuren är $P = 11$.

Funktionen kommer alltså för stora P att approximativt motsvara enhetspulser vid punkterna $n = \text{heltal}$. Funktionen representerar ett så kallat *pulståg* – ”enhetspulståget”.



Resultatet kan med hjälp av generaliserade funktioner uttryckas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) \quad (5.2)$$

Övning: 5.6, sid. 43.

Sambanden (5.2) – (5.2') är alltså likheter mellan *generaliserade* funktioner och är med den klassiska analysens synsätt meningslösheter. Exempelvis är vänsterleden divergenta serier²⁶ som saknar (klassisk) summa! Inte desto mindre kan man använda sambanden för att förhållandevis lätt härleda ”klassiska” resultat som är mycket svåra att få fram med andra metoder.

Exempel 5.1

Om man t.ex. multiplicerar ekvationen (5.2') med en funktion $x(t)$ som är kontinuerlig åtminstone i punkterna $2n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, får man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{int} = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - 2n) = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n) \delta(t - 2n) \quad (5.3)$$

och sedan integrerar leden över hela reella axeln, så får man en mycket generell summationsformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{int} dt = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - 2n) dt = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n) \quad (5.4)$$

Integralen i vänsterledet känner vi igen²⁷ som fouriertransformen av $x(t)$, $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$, i heltalspunkterna $\omega = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, varför (5.4) kan skrivas

²⁶ De successiva termerna i en serie som är konvergent i klassisk mening måste gå mot 0. Termerna i summan i vänster led har alla beloppet 1, så den serien kan inte vara konvergent.

²⁷ Analysekvationen (1.8) i kapitel 1.

$$X(n) = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2-n). \quad (5.4')$$

Anmärkning: Detta samband är (en variant) av den s.k. *Poissonska summationsformeln*. För att den skall vara giltig i "klassisk" mening måste funktionen $x(t)$ ha en del "snällhetsegenskaper" (krav på konvergens av inblandade summor och integraler t.ex.). Vi går dock inte in på detta närmare här. Litet slarvigt kan man säga att den i praktiskt förekommande fall stämmer om de båda leden är meningsfulla från "klassisk" synpunkt.

För att se vad sambandet (5.4') innebär i något speciellt fall, låt oss ta

$$x(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0 & \text{om } |t| > 1/2, \end{cases}$$

Fouriertransformen till denna funktion beräknades i exempel 1.2 och den är

$$X(\omega) = \frac{\sin \omega/2}{\omega/2}, \text{ då } \omega < 0 \text{ och } 1, \text{ då } \omega = 0.$$

Eftersom $\text{rect}(2-n) = 0$ för alla heltal $n \neq 0$ och $= 1$ för $n = 0$, så får man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n/2}{n/2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n/2}{n/2} = 2,$$

vilket, eftersom de båda serierna i vänster led är lika, ger att

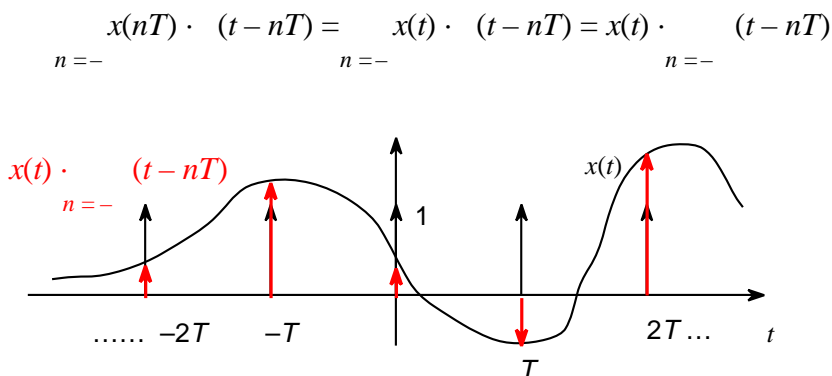
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n/2}{n/2} = -\frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Övningar: 5.7. – 5.9, sid. 43.

5.3. Regelbunden sampling multiplikation med pulståg

Inkommande kontinuerligt definierade signaler $x(t)$ kan i allmänhet inte avläsas vid alla tidpunkter. Något mer realistiskt är att de avläses vid tidpunkter $t = nT, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$: Man säger då att man *samplear* signalen (regelbundet) med *sampleavståndet* T . Värdena vid sampletiderna ges då av följderna $x[n] = x(nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Anmärkningsvärt nog kan motsvarande analytiska procedur koncist uttryckas med hjälp av pulstågsfunktionerna, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Den samplede signalen svarar nämligen mot pulståget:



28 Obs att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n)$. Summation av samma termer, men i omvänd ordning.

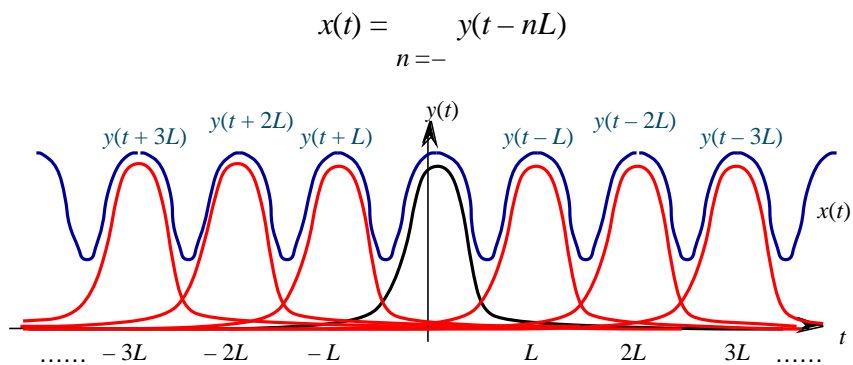
Sampling med samplingsavståndet T av en kontinuerlig signal svarar mot att signalen multipliceras med pulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Övningar: 5.10, 5.11

5.4. Periodisk fortsättning faltning med pulståg

Det visar sig att också operationen ”att bilda den L -periodiska fortsättningen till en signal” har att göra med pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL)$. Låt nämligen $x(t)$ vara den L -periodiska fortsättningen av $y(t)$:



Observera att $y(t - nL) = y(t - (-n)L)$, varför

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nL) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - (-n)L) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nL) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - (t - nL)) d\tau \quad (5.6)$$

där $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL)$ är pulståget

Integralen i höger led i (5.6) är tydligen en faltning

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - (t - nL)) d\tau = y(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL)$$

dvs.
$$x(t) = y(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL) \quad (5.7)$$

Sammanfattningsvis:

L-periodisk fortsättning av en signal svarar mot att signalen *faltas* med pulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - nL) \cdot$$

Övningar till kapitel 5:

5.1 Summera

a. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots + \frac{2^{99}}{3^{100}},$

b. $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \dots - \frac{2^{99}}{3^{100}}.$

5.2 I sambandet $\frac{1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^n}{1 - k + k^2 - k^3 + \dots - k^n} = 2$ är *n* ett udda heltal 1. Bestäm *k*.

5.3 Verifiera att summan

$$e^{-Mt} + e^{-(M-1)t} + \dots + e^{-t} + 1 + e^t + \dots + e^{(M-1)t} + e^{Mt}$$

för $t \geq 0$ kan skrivas

$$\frac{e^{Pt/2} - e^{-Pt/2}}{e^{t/2} - e^{-t/2}} = \frac{\sinh Pt/2}{\sinh t/2},$$

där *P* är antalet termer i summan.

(*Tips*: Använd t.ex. summations sambandet i avsnitt 5.1. Serien är geometrisk med första term e^{-Mt} , kvot e^t och antalet termer är $2M + 1$. Alternativt kan man använda ett knep likartat med det i beviset i avsnitt 5.1.: Om summan kallas *S* – bilda $e^{t/2} S$ och $e^{-t/2} S$. Dessa summor kommer att innehålla samma termer med undantag för två. Differensen dem emellan, $(e^{t/2} - e^{-t/2})S$, är då differensen mellan dessa två termer. Ur detta får man *S*.)

5.4 Den geometriska-serie-summan i avsnitt 5,1 är tydligen en polynom i variabeln *k* och måste därför vara kontinuerlig. Speciellt måste summans värde för $k = 1$ vara $= \lim_{k \rightarrow 1} a \frac{1 - k^n}{1 - k},$

Verifiera detta genom att direkt beräkna gränsvärdet t.ex. med hjälp av l'Hospitals regel.

5.5 Vilket värde har $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sinh Pt/2}{\sinh t/2} ?$

5.6 "Skala" (5.2) genom att sätta $t = t/T$ (*t* variabel, *T* konstant > 0). Utnyttja sambandet (4.6) för att verifiera att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{int/T} = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - nT) \quad (T\text{-periodiska fallet}) \quad (5.2')$$

och speciellt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{int} = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - 2n) \quad (2\text{-periodiska fallet}) \quad (5.2'')$$

5.7 Vilket samband får man om *x(t)* sätts till $e^{-|t|}$ i (5.4)?

För fouriertransforming av *x(t)* se övning 1.7b – d.

5.8 a. Verifiera att fouriertransformen till $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } |t| < a, \\ 0 & \text{om } |t| > a, \end{cases} \quad a > 0$, är $X(\omega) = 2 \frac{\sin a\omega}{\omega}$.

b. Genom att välja $x(t)$ som i uppgift a, visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n} = \begin{cases} (\pi - a)/2, & \text{för } 0 < a < 2\pi, \\ (3\pi - a)/2, & \text{för } 2\pi < a < 4\pi. \end{cases}$

c. Vilket är värdet av summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n}$, då $2N\pi < a < 2(N+1)\pi$, N heltal?

5.9 Bestäm den reella fourierserien till den 2-periodiska funktion $g(a)$ som i intervallet $0 < a < 2\pi$ ges av

$$g(a) = \frac{1-a}{2}.$$

Ledning: Man kan förstås använda integralformlerna för beräkning av seriens koefficienter, men man kan också avläsa svaret från resultatet i uppgift 5.8b.

5.10 Låt $x(t) = \cos t$. Skriv upp analytiska uttryck för sampelfunktionerna för sampelavstånden $T = \pi/2$ respektive π . Vilka är följderna av sampelvärden i de båda fallen?

5.11 Låt $x_T(t)$ vara samplingen av signalen $x(t)$ med sampelavståndet T .

a. Beräkna $I_T = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) dt$.

b. Vad bör gränsvärdet $\lim_{T \rightarrow 0+} T I_T$ rimligtvis ha för värde?

(Rita figur, se efter vad $T x(nT)$ betyder geometriskt.)

5.12 Förenkla $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin t \cdot \text{rect} \frac{t}{2} * \text{rect} (t - 2n)$. (Rita figur!)

5.13 Beräkna $y \frac{3}{4}$, då $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin t \cdot \text{rect} \frac{t}{2} * \text{rect} (t - n)$. (Rita figur!)

6. Fourierserier och fourierutveckling

6.1. Syntes- och analyskvationerna för fourierserier

I det här avsnittet skall vi se att formelparet (1.3) och (1.4) för den komplexa fourierserieutvecklingen av L -periodiska funktioner,

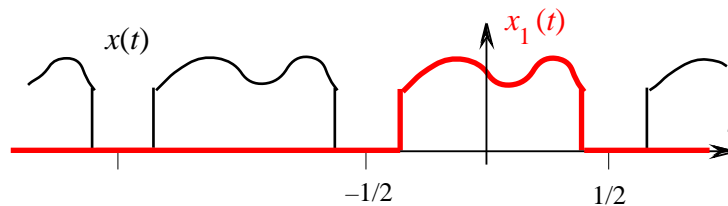
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / L},$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau) e^{-2\pi i n \tau / L} d\tau.$$

är en konsekvens av summationsformeln (5.2):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n),$$

Låt $x(t)$ för enkelhets skull vara en 1-periodisk funktion. Funktionen $x_1(t) = x(t) \cdot \text{rect}(t)$ beskriver då x :s värden i intervallet $-1/2 < t < 1/2$ och $x(t)$ är den 1-periodiska fortsättningen av $x_1(t)$.



d.v.s.
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \delta((t - \tau) - n) d\tau,$$

Summationsformeln $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$ gör det möjligt att skriva om uttrycket för $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta((t - \tau) - n) e^{2\pi i n \tau} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{2\pi i n (t - \tau)} d\tau.$$

Här är $e^{2\pi i n (t - \tau)} = e^{2\pi i n t} \cdot e^{-2\pi i n \tau}$, där den första faktorn tydligen är oberoende av integrationsvariabeln τ , alltså

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau \cdot e^{2\pi i n t}.$$

Men $x_1(\tau) = 0$ utanför intervallet $-1/2 < \tau < 1/2$ och $= x(\tau)$ inom det intervallet, varför

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} x(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau,$$

vilket ger

$$x(t) = \sum_{n=-1/2}^{1/2} c_n e^{2 i n t},$$

$$\text{där } c_n = \int_{-1/2}^{1/2} x(\tau) e^{-2 i n \tau} d\tau.$$

På så sätt återfår vi också för periodiska funktioner med godtycklig period L sambanden (1.3') och (1.4'):

$$x(t) = \sum_{n=-L/2}^{L/2} c_n e^{2 i n t / L}, \tag{6.1}$$

$$\text{där } c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau) e^{-2 i n \tau / L} d\tau. \tag{6.2}$$

Processen, att gå från en periodisk funktion till dess spektrum, är en *transformation* (eller *transform*), den så kallade *fourierserietransformen* (\mathcal{FS}). Om man vill framhäva detta kan man skriva analyskvationen som:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau) e^{-2 i n \tau / L} d\tau, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Synteskvationen, som ju omvänt anger vilken periodisk funktion som har spektret c_n , kan skrivas på motsvarande sätt:

$$c_n \xrightarrow{\mathcal{FS}^{-1}} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2 i n t / L}.$$

Exempel 6.1: För $x(t) = (t), -1/2 < t < 1/2$ får man fourierkoefficienterna

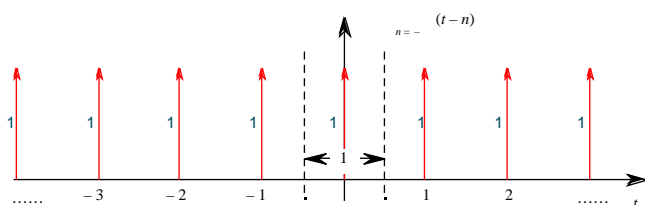
$$c_n = \int_{-1/2}^{1/2} (t) e^{-2 i n t} dt = 1.$$

Den 1-periodiska fortsättningen av (t) är pulståget $(t-n)$, varför synteskvationen ger

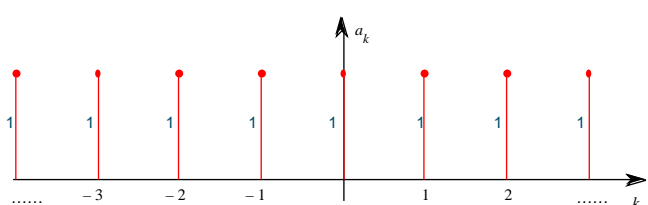
$$(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2 i n t},$$

d.v.s. vi återfår sambandet (5.2) ovan.

Funktionen



och dess fourierkoefficienter



Övningar: 6.1, 6.2, sid. 50.

Om $x(t)$ redan är en L -periodisk funktion, så är $x(t)$ identisk med den L -periodiska fortsättningen av funktionen $y(t) = x(t)$, $0 < t < L$. Syntesekvationen ger därför att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / L}, \text{ då } -L/2 < t < L/2.$$

Eftersom integralen $\int_C x(t) dt$ är oberoende av C om $x(t)$ är L -periodisk,²⁹ så spelar det ingen roll vilket

intervall av längd L man integrerar över. Man kan använda beteckningen \int_C för sådana integrationer.

Analysekvationen kan då skrivas:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_C x(t) e^{-2\pi i n t / L} dt. \quad (6.2')$$

6.2. Egenskaper hos fourierserietransformen

Mellan en periodisk funktion och dess fourierkoefficienter finns många rätt enkla samband. Här följer en lista med några av de viktigaste:

Om den L -periodiska signalerna $x(t)$ och $y(t)$ har fourierkoefficienterna c_n resp. d_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, så gäller att

funktionen	har fourierkoefficienterna
$C x(t) + D y(t), C$ och D konstanta	$C c_n + D d_n$
$x'(t)$	$\frac{2\pi i n}{L} c_n$
$x''(t)$	$-\frac{4\pi^2 n^2}{L^2} c_n$
$x^{(m)}(t)$	$\frac{2\pi i n}{L}^m c_n$
$x(t - a)$	$e^{-2\pi i n a / L} \cdot c_n$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - nL)$	$c_n = \frac{1}{L}$

Notera att sambanden som rör derivering och translation blir speciellt enkla för 2π -periodiska funktioner.

Tabell över den reella varianten av fourierserierna finns också i handboken .

Dessa egenskaper följer ganska omedelbart ur analys- och syntesekvationerna. Exempelvis ger derivering av syntesekvationen

²⁹ Kan visas formellt genom att man deriverar integralen med avseende på c och utnyttjar att $x(c + P) = x(t)$. Genomför gärna detta!

$$x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(2in/L) c_n] e^{int/L},$$

där man avläser fourierseriekoefficienterna för $x'(t)$ till $(2in/L) c_n$.

Förutom dessa egenskaper så har vi den viktiga "energirelationen", Parsevals relation (1.20):

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Den gäller för alla L -periodiska signaler där integralen i vänster led är ändlig (dvs. signaler med ändlig medeleffekt).

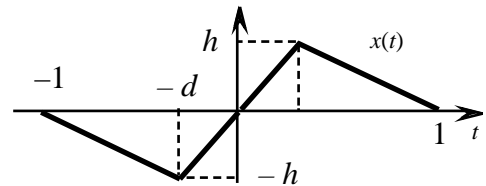
I nästa exempel använder vi några av ovanstående egenskaper för att underlätta räknearbete:

Exempel 6.2:

Problem: Bestäm fourierutvecklingen till den 2-periodiska funktion som i intervallet $0 \leq t < 1$ ges av

$$x(t) = \begin{cases} ht/d, & \text{då } 0 \leq t < d, \\ h(1-t)/(1-d), & \text{då } d \leq t < 1 \end{cases}$$

och för vilken $x(-t) = -x(t)$.



Lösning: Syntesekvationen har utseendet $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, där fourierkoefficienterna kan beräknas direkt ur analyskvationen. Man kan dock slippa en hel del räkningar om man observerar att x' och framför allt x'' är betydligt enklare funktioner än x :

$$x'(t) = \begin{cases} h/d, & \text{då } 0 < |t| < d, \\ -h/(1-d), & \text{då } d < |t| < 1. \end{cases} \quad (\text{Rita grafen!})$$

och
$$x''(t) = \frac{h}{d} \delta(t+d) - \frac{h}{1-d} \delta(t-d) = \frac{h}{d(1-d)} (\delta(t+d) - \delta(t-d)). \quad (\dagger)$$

Deriverar man syntesekvationen 2 ggr får man att $x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^2 c_n e^{int}$. Här avläser man att x'' 's

fourierkoefficienter $(in)^2 c_n = -2n^2 c_n$ erhålls ur

$$\begin{aligned} -2n^2 c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x''(t) e^{-int} dt = \frac{h}{2d(1-d)} \int_{-1}^1 (t+d) e^{-int} dt - \frac{h}{2d(1-d)} \int_{-1}^1 (t-d) e^{-int} dt = \\ &= \frac{h}{2d(1-d)} (e^{ind} - e^{-ind}) = \frac{ih}{d(1-d)} \sin(nd), \text{ varav för } n \neq 0: \end{aligned}$$

$$c_n = -\frac{ih}{2n^2 d(1-d)} \sin(nd),$$

Återstår att beräkna c_0 som enligt analyskvationen är $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(t) dt$, d.v.s. funktionens medelvärde över en

period. Detta medelvärde är i det här fallet uppenbarligen $= 0$.

Vi får alltså fourierserien

$$x(t) = -\frac{ih}{2d(1-d)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nd)}{n^2} e^{int}.$$

Anmärkning: Alternativt kan man få fram resultatet utgående från uttrycket för andraderivatan (†) och egen-skapstabellen ovan: De 2-periodiska fortsättningarna av respektive funktioner nedan har enligt tabellen de angivna koefficienterna:

- $(t) \quad \frac{1}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
- $(t \pm d) \quad e^{\pm nid} \cdot \frac{1}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
- $x'(t) \quad \frac{h}{d(1-d)} (e^{-nid} - e^{nid}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{hi}{d(1-d)} \sin nd, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$
- För $n \neq 0: x(t) \quad c_n = -\frac{1}{2n^2} \cdot \frac{hi}{d(1-d)} \sin nd$
- För $n = 0$ får vi som nyss direkt ur analyskvationen att $c_0 = 0$.

Detta ger svaret ovan.

Övningar: 6.3, 6.4, sid. 50.

6.3. Konvergensfrågor

Eftersom likheten i synteskvationen är en likhet mellan generaliserade funktioner är det inte självklart att likheten gäller i klassisk mening, d.v.s. att

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M c_n e^{int},$$

där limesbegreppet är som i den ”vanliga” analysen. Detta problem är inte alldeles enkelt att reda ut, men tillräckliga villkor finns uppskrivna i kurslitteraturen, ZC Theorem 11.1., sid 437:

Om $x(t)$ och $x'(t)$ ⁽³⁰⁾ är styckvis kontinuerliga och har höger- och vänstergränsvärden i alla punkter så är

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M c_n e^{int} = \frac{x(t+) + x(t-)}{2}.$$

Konvergens råder därför i praktiken ”alltid”, med undantag för de ställen där $x(t)$ är diskontinuerlig. Där blir seriesumman i stället = värdet mitt i språngintervallet. I närheten av sådana punkter uppträder också en komplikation som kallas *Gibbs fenomen* (se ZC sid 442.)

Förutsättningarna i konvergenssatsen ovan kan inte tas bort. Man känner exempelvis till kontinuerliga periodiska funktioner vars fourierserier inte konvergerar för alla t och än värre, integrabla funktioner vars fourierserie inte konvergerar för något enda t . Situationen kan kännas en smula obekvämlig!

Situationen ter sig dock mera tillfredställande om noterar att konvergensbegreppet egentligen mest används här för att på ett precist sätt kunna uttrycka att olika funktioner ”ligger nära varandra”.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M c_n e^{int} = x(t)$$

får betyda att

$$\sum_{n=-M}^M c_n e^{int} \text{ ”ligger godtyckligt nära” } x(t) \text{ för ”tillräckligt stora” värden på } M.$$

³⁰ Derivatans i ”klassisk” mening – ingen generaliserad funktion – avses här.

Som vi tidigare sett (§1.2) finns det andra möjliga sätt att mäta graden av "närhet". En lämplig kandidat är att ta *energin* (under en period) hos *differensen* mellan signalerna som ett sådant mått.

Att $\sum_{n=-M}^M c_n e^{int}$ "ligger godtyckligt nära" $x(t)$ för "tillräckligt stora" värden på M , får då betyda att

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M |c_n e^{int} - x(t)|^2 dt = 0, \quad (6.3)$$

där $\|\cdot\|$ definieras som i (1.19)

Viktigare för signalteorin än ovannämnda konvergenssats är att man faktiskt kan bevisa att:

Likheten (6.3) gäller för alla L -periodiska signaler med ändlig energi/period, dvs om bara

$$\int_L |x(t)|^2 dt < \infty$$

Inga speciella krav på kontinuitet eller deriverbarhet behövs för detta! Beviset för den satsen ligger utanför den här kursens ram.

Övningar till kapitel 6:

6.1a. Bestäm fourierkoefficienterna till de 1-periodiska funktionerna $\sin 2t$ och $\cos 2t$.

b. Bestäm fourierkoefficienterna till den L -periodiska fortsättningen till $\sin t$. Vilken blir syntesekvationen i detta fall?

6.2 Vilken är fourierserierutvecklingen $y(t)$ av den 3-periodiska funktion för vilken

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{då } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{då } 1 < t < 3. \end{cases}$$

6.3 a. Bestäm de komplexa fourierkoefficienterna till den 2-periodiska funktionen $x(t)$ för vilken:

$$x(t) = t^2, \text{ då } -1 < t < 1.$$

Använd någon av beräkningsmetoderna som användes i exempel 6.2. Ange också den reella fourierserierutvecklingen.

b. Samma som a, men med 4-periodiska funktionen

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } |t| < 1 \\ 2 - |t|, & \text{då } 1 < |t| < 2, \end{cases} \quad (\text{Skissera först grafen!})$$

c. Samma som a, men med 6-periodiska funktionen

$$x(t) = \begin{cases} 3, & \text{då } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{då } 1 < t < 3, \\ 2, & \text{då } 3 < t < 5, \\ -1, & \text{då } 5 < t < 6. \end{cases} \quad (\text{Skissera först grafen!})$$

6.4 a. Förenkla koefficienterna i fourierserien för signalen i exempel 6.2 för det fall att $d = h = 1/2$.

b. Ett (idealt) lågpasfilter släpper igenom alla harmoniska signaler upp till en viss frekvens B ograverade och ingen av de harmoniska signalerna med högre frekvens. Man vill konstruera ett lågpasfilter så att andelen förlorad energi vid filtrering av signalen i a-uppgiften blir mindre än 1%. Hur skall brytfrekvensen B då väljas? Variabeln t mäts i ms.

Använd till att börja med Parsevals relation till att verifiera, att om man väljer B [kHz] i intervallet $M + 1/2 < B < M + 3/2$ (M heltal > 0), så kommer andelen förlorad energi att vara

$$1 - \frac{96}{4} \sum_{m=0}^M \frac{1}{(2m+1)^4}.$$

6.5 I ett tabellverk hittar man angående 2-periodiska fourierserier att

$$\text{om } c_n = (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}, \text{ s\aa } \ddot{a}r \ x(t) = \frac{e^t}{\sinh t}, \text{ d\aa } -\pi < t < \pi.$$

a. Best\am de exakta v\ardena av seriesumman d\aa $t = 0$, $t = 4$ respektive $t = -4$.

b. Best\am med hj\alp av resultatet i a-uppgiften det exakta v\ardet av summan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

6.6 L\at $x(t) = \sin 2t + 3 \cos 4t$

a. Verifiera att funktionen \ar 2-periodisk och utveckla den i reell respektive komplex 2-periodisk fourierserie.

b. Verifiera att funktionen ocks\aa \ar 4-periodisk och utveckla den i reell respektive komplex 4-periodisk fourierserie.

6.7 L\at $x(t) = t(t-3) + (\sin t)(t-1/6)$.

a. Best\am fouriertransformen till $x(t)$.

b. L\at $y(t)$ vara den 4-periodiska forts\attningen av funktionen $x(t)$. Best\am y 's komplexa fourierseriekoefficienter.

6.8 Den 3-periodiska generaliserade funktionen $x(t)$ har de komplexa fourierseriekoefficienterna $c_n = 1 - (-1)^n$. Best\am $x(t)$.

6.9 a. Best\am c_n s\aa att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt} = e^t \text{ i intervallet } -\pi < t < \pi.$$

b. Best\am a_n och b_n s\aa att

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = e^t \text{ i intervallet } -\pi < t < \pi$$

6.10 a. Ber\akna fouriertransformen till

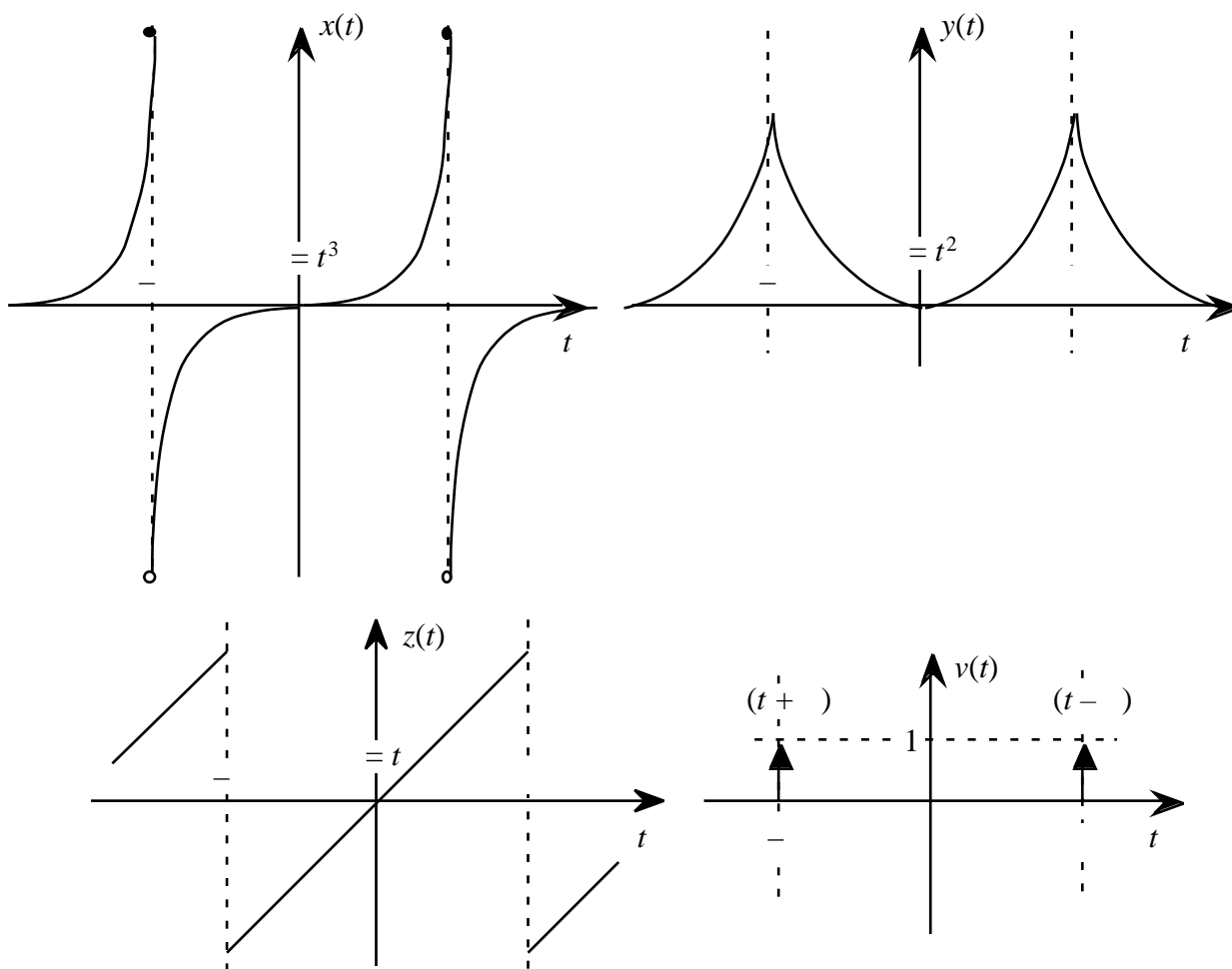
$$x(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{d\aa } |t| < 1, \\ 0, & \text{d\aa } 1 < |t| \end{cases}$$

b. Best\am de komplexa och de reella fourierseriekoefficienterna till $y(t)$, den 2-periodiska forts\attningen av $x(t)$.

c. Best\am de komplexa och de reella fourierseriekoefficienterna till $z(t)$, den 2-periodiska forts\attningen av $x(t)$.

d. Skissera graferna f\or $y(t)$ och f\or $z(t)$.

6.11 Låt $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ och $v(t)$ vara 2π -periodiska funktioner. Deras grafer framgår av följande figurer:



- Vilka samband finns mellan $x'(t)$, $y(t)$ och $v(t)$, mellan $y'(t)$ och $z(t)$ och mellan $z'(t)$ och $v(t)$?
- Vilka samband finns mellan de komplexa fouriersseriekoefficienterna a_n , b_n , c_n och d_n , $n \neq 0$, för respektive funktioner?
- Använd resultatet i b. för att skriva upp FS-koefficienterna till $x(t)$.

6.12 Låt $x(t) = \text{rect} \frac{t}{2} \cdot \cos at$ (Rita!)

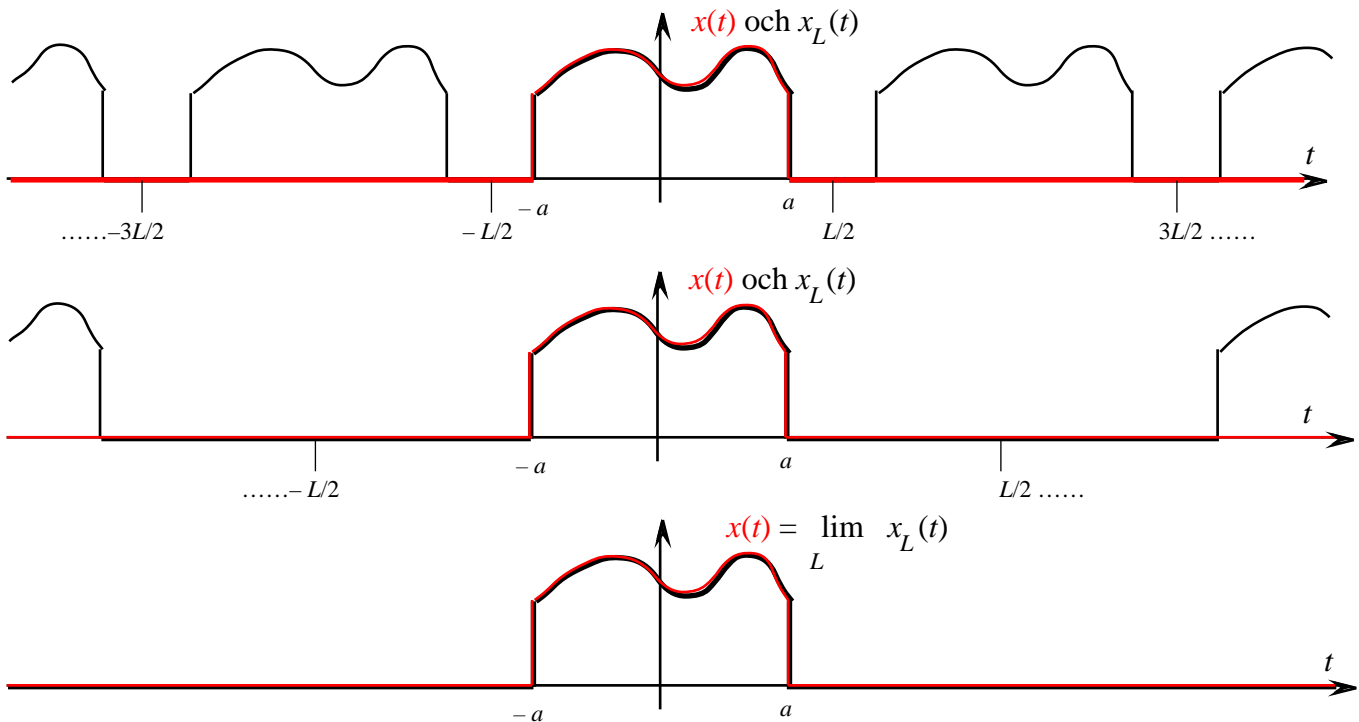
- Verifiera att $x''(t) + a^2x(t) = (a \sin a) \cdot ((t - \pi) + (t + \pi))$.
- Bestäm koefficienterna i den komplexa fouriersserieutvecklingen av den 2π -periodiska fortsättningen av $x(t)$ för de fall då a inte är något heltal.
- Vilka är koefficienterna då a är ett heltal?

7. Fouriertransformen

7.1. Informella härledningar av syntes- och analyskvationerna för fouriertransformen

7.1.1. Approximation av "godtycklig" funktion med periodiska funktioner

Fourierseriers summa är alltid en periodisk funktion, och i stort sett varje periodisk funktion kan skrivas som (= representeras av) en fourierseriesumma. Det ligger nära till hands att söka efter liknande representationer för godtyckliga icke-periodiska funktioner genom att uppfatta dem som gränsvärdet för följer av periodiska funktioner med succesivt växande periodlängd. Figurerna nedan illustrerar den idén:



Funktionen $x(t)$ är = 0 utanför intervallet $-a < t < a$, men för övrigt godtycklig. För $x_L(t)$, den L -periodiska fortsättningen av $x(t)$, gäller då att

$$\lim_{L \rightarrow \infty} x_L(t) = x(t).$$

Fourierkoefficienterna till fourierserietvecklingen av $x_L(t)$ ges av

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t) e^{-in\pi t/L} dt = \frac{1}{L} \int_{-a}^a x(t) e^{-in\pi t/L} dt$$

och enligt synteskvationen har man att

$$x_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-a}^a x(\tau) e^{-in\pi \tau/L} d\tau \cdot e^{in\pi t/L}$$

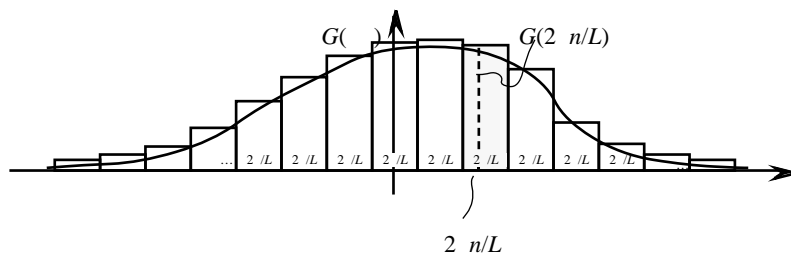
Om vi i uttrycket $\frac{1}{L} \int_{-a}^a x(\tau) e^{-in\pi \tau/L} d\tau \cdot e^{in\pi t/L}$ sätter $2\tau/L = \tau'$, så förenklas det till

$$x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = G(\omega).$$

Man får då att

$$x_L(t) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{2\pi n}{L}\right) e^{-i\frac{2\pi n}{L}t} \quad (7.1)$$

Den summa som vi har här är nära släkt med Riemannsummorna som används vid definitionen av enkelintegral:



En heuristisk tolkning av gränsövergången $L \rightarrow \infty$ är att varje term i summan (7.1) så när som på en faktor $\frac{1}{2}$ svarar mot "arean" av en "rektangel" med "sidorna" $\frac{2}{L}$ och $G\left(\frac{2\pi n}{L}\right)$. Den rektangelarean approximerar arean av motsvarande område mellan G 's graf och ω -axeln.

Med ökande L blir rektanglarna smalare och smalare och approximationerna successivt bättre och då $L \rightarrow \infty$

kommer summan att $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$.

Sätter man

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{Analysekvationen}) \quad (7.2)$$

så är $G(\omega) = X(\omega) \cdot e^{i\omega t}$ och man får

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (\text{Syntesekvationen}) \quad (7.3)$$

Och vi får det i inledningen nämnda formelparet (1.7) och (1.8) för fouriertransformen

Syntesekvationen (7.3) kan alltså sägas uttrycka en "godtycklig" funktion som en linjär kombination (låt vara en oändlig sådan) av harmoniska svängningar $e^{i\omega t}$. Sett på det sättet anger analysekvationen (7.2) den "vikt", $X(\omega)$, som vinkelfrekvensen ω har i denna linjära kombination.

Anmärkning: (Ett mellanspel om variabelval och beteckningar)

Analys- och syntesekvationerna för fouriertransformen blir litet "snyggare" om man använder sig av variabeln

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ i stället för ω , man får då:

$$X(2\pi f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi i f t} dt \quad (7.2')$$

och, med tanke på att $d\omega = 2\pi df$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{2\pi i f t} df. \quad (7.3')$$

Kursboken i Ljud- och vibrationslära, i uppslagsverket och även ZC använder ω -variabeln³¹, men f -variabeln förekommer inte så sällan i annan litteratur. Beteckningarna för de olika transformerna är tråkigt nog inte standardiserade. Här har vi liksom tabellverket valt att motsvarande stora bokstaver får beteckna fouriertransformen till den "tidsberoende" funktionen, som alltid betecknas med en liten bokstav ($X(\omega)$ är transform av $x(t)$). I kursboken för Ljud&vib används fetskriven bokstav för transformen ($\mathcal{F}(\omega)$ är transformen av $F(t)$).

Andra varianter för beteckning av fouriertransformen som också förekommer i litteraturen är

$$\mathcal{F}(x) \text{ eller } \mathcal{FT}(x)$$

$$\hat{x}(\omega) \text{ eller } \hat{x}(f).$$

I dessa varianter framhävs via "operatorerna" \mathcal{F} , \mathcal{FT} respektive $\hat{}$ att fouriertransformen "förvandlar" funktioner ("signaler") till andra funktioner ("signalens spektrum"). Vill man ytterligare poängtera den egenskapen kan man skriva t.ex

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} X(f)$$

för analyskvationen och

$$X(f) \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} x(t)$$

för syntesekvationen.

Samma synsätt och liknande beteckningar har man ibland för fourierserierna. Analysekvationen

$$c_n = \int_{-1/L}^{1/L} x(t) e^{-2\pi i n t / L} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

"förvandlar" signalen $x(t)$ till en talföljd c_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Om den operationen betecknas \mathcal{FS} kan man skriva

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} c_n$$

och för syntesekvationen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / L},$$

$$c_n \xrightarrow{\mathcal{FS}^{-1}} x(t).$$

Man kan resonera sig fram till formelparet (7.2) och (7.3) på mångahanda vis. Ett mera direkt förfarande som inte går omvägen över fourierserierna skissas i nästa avsnitt. Den innehåller också en omskrivning av δ -funktionen som är intressant i sig.

³¹ Men i ZC definieras fouriertransformen beklagligtvis som $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{+i \omega t} dt$, med +tecken i integrandens exponent

(sid 536 i 6:e upplagan). Detta gör att $X_{Zill-Cullen}(\omega) = X_{\text{variant}}(-\omega)$!

7.1.2 Härledning med hjälp av $e^{i\omega t}$ -funktionen

- $e^{i\omega t}$ -funktionen som summa av harmoniska vågor

En kontinuerlig motsvarighet till summan $\sum_{k=-M}^M e^{i k \omega t}$ ges av integralen

$$d_{2M} = \int_{-M}^M e^{i \omega t} dt,$$

där man så att säga summerar harmoniska svängningar för *alla* frekvenser i ett visst intervall.

För summan $\sum_{n=-M}^M e^{i n \omega t}$ härleddes i avsnitt 5.2.2 att man efter gränsövergång $M \rightarrow \infty$ får likheten:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i n \omega t} = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n), \quad (7.4)$$

(som är en likhet mellan generaliserade funktioner).

Litet snyggare blir den formeln om man väljer ”varvfrekvensen” $f = \omega / 2\pi$ som variabel. Man får då³²

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n), \quad (7.4')$$

Vi skall se att man har en motsvarande relation för integralfallet,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i \omega t} dt = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n) \quad (7.5)$$

och med varvfrekvensen som variabel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n). \quad (7.5')$$

Integralen d_{2M} kan beräknas med standardmetoder:

För $\omega \neq 0$ är

$$d_{2M} = \int_{-M}^M \frac{e^{i \omega t}}{i} dt = \frac{e^{i \omega M} - e^{-i \omega M}}{i \omega} = \frac{e^{i \omega M} - e^{-i \omega M}}{2i \omega} = \sin \omega M = \frac{\sin M \omega}{\omega}$$

och för $\omega = 0$ får man den konstanta integranden 1, varför värdet blir integrationsintervallets längd $2M$. Sätter

vi denna till P ,⁽³³⁾ så får vi

$$d_P(\omega) = \frac{\sin P \omega / 2}{\omega / 2}, \text{ då } \omega \neq 0 \text{ och } \omega = P, \text{ då } d_P = 0.$$

³² Obs sambandet $(1/a) = a^{-1}$ om $a > 0$ (sambandet (4.6).)

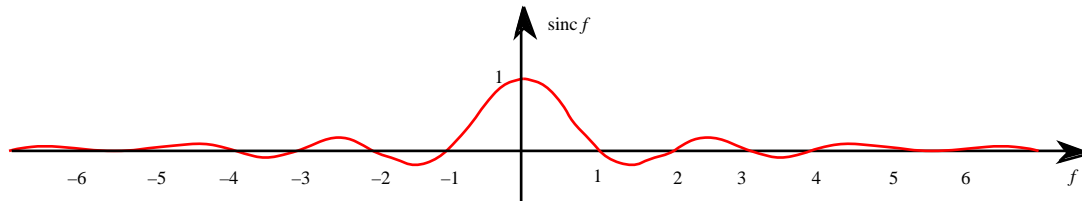
³³ Observera analogin med summafallet, där P betecknade antalet termer i summan.

Man kan få visst grepp om hur denna funktion beror av sina två variabler P och f genom att göra följande observationer:

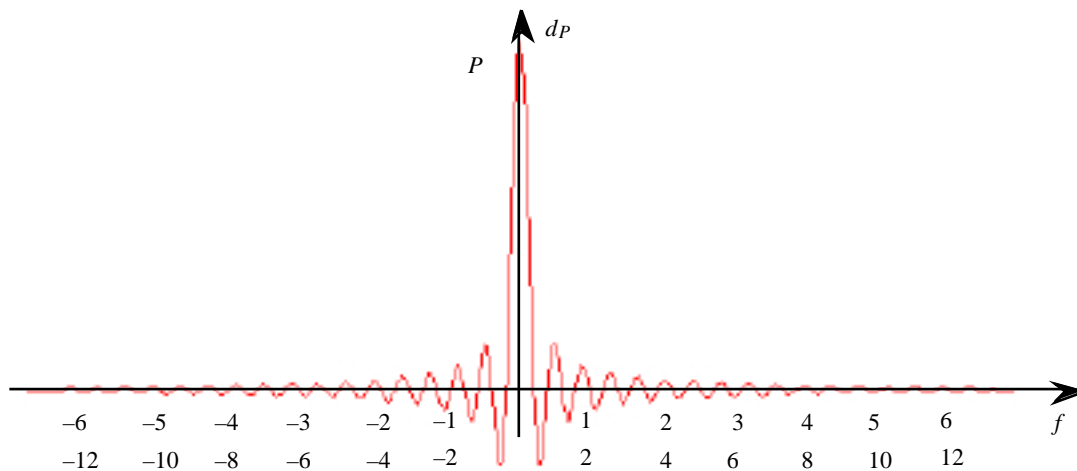
- Uttryckt i varvfrekvensen $f = \omega/2\pi$ och för $P = 1$, får vi funktionen $\frac{\sin f}{f}$ (då $f \neq 0$) och 1 (då $f = 0$). Den har sina nollställen i heltalspunkterna $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ och växlar tecken i alla dessa och är 0 då $f = 0$. Funktionen har fått ett särskilt namn – *sinus cardinalis*, förkortat *sinc*:

$$\text{sinc } f = \frac{\sin f}{f}, \text{ då } f \neq 0 \text{ och } = 1, \text{ då } f = 0. \quad (7.6)$$

Dess graf representerar ett slags dämpad svängning:



- För allmänare P får man, eftersom $d_P(\cdot) = d_P(2\pi f) = \frac{\sin P f}{f} = P \frac{\sin P f}{P f} = P \text{ sinc } P f$, att dess graf erhålls ur grafen för $\text{sinc } f$ genom en ”areabevarande” deformation av den typ som beskrevs i avsnitt 2.8 – en hoptryckning i skalan P i horisontell led och en töjning i skalan P i vertikal led. Här kommer en skiss av grafen, där båda frekvensskalorna f och P är markerade.



Grafen har för stora P en markant topp i origo och svänger med dämpning. Dess nollställen ligger i punkterna $f = \pm 1/P, \pm 2/P, \pm 3/P, \dots$ (resp. $f = \pm 2/P, \pm 4/P, \pm 6/P, \dots$), d.v.s. allt tätare med växande P .

- Den ”areabevarande” skalningen innebär att

$$d_P(\cdot) d f = 2 \quad d_P(2\pi f) d f = 2 \quad \text{sinc } f d f.$$

Värdet av dessa integraler är alltså oberoende av P , d.v.s. en konstant.

Med metoder som går en bra bit utöver de integrationsförfaranden som beskrivs i grundkurserna kan man visa att integralen i det ledet längst till höger = 1. ⁽³⁴⁾ Vidare gäller att $\frac{dP(\omega)}{d\omega} = 0$, då $P(\omega)$ för alla intervall $a < \omega < b$ som *inte* innehåller talet 0.

Man kan därför säga att $\frac{dP(\omega)}{d\omega}$ för stora P tycks approximera $\delta(\omega)$ -pulsens $2 \cdot \delta(\omega)$. Man kan strikt visa att det faktiskt är så. Man har det *exakta* sambandet:

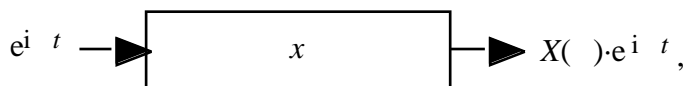
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt = 2 \cdot \delta(\omega) \quad (7.5)$$

eller, med $\omega = 2\pi f$ och med tanke på att $2 \cdot \delta(2\pi f) = \delta(f)$,

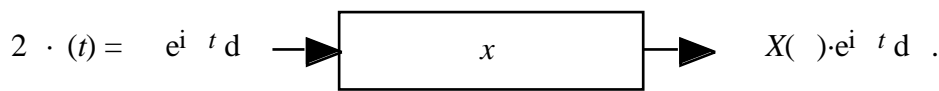
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} dt = \delta(f). \quad (7.5')$$

• *Alternativ härledning av analys- och syntesekvationerna för fouriertransformen*

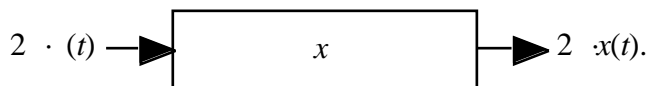
Vi vet enligt (1.25) att exponentialfunktionerna $e^{i\omega t}$ är egenfunktioner till LTI-systemen, om vi döper pulssvaret till $x(t)$,



där $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$. Integreras detta med avseende på ω , så får man



Men eftersom insignalen här är en uppskalad δ -puls, så är utsignalen ett på motsvarande sätt uppskalat pulssvar:



³⁴ De primitiva funktionerna till sinc-funktionen kan tyvärr inte uttryckas med hjälp av de elementära funktionerna, så integrationssambandet $\int_a^b x'(\omega) d\omega = x(b) - x(a)$ är dessvärre inte till någon nytta här!

I båda fallen är det fråga om samma utsignal, varför $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$ och slutsatsen blir:

$$\text{Om } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \text{ så måste } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

7.2. Mer om faltning och fouriertransform

Med *faltningen*, $x*y$, av två funktioner $x(t)$ och $y(t)$ menas alltså funktionen

$$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau.$$

Man betraktar gärna faltning som ett slags multiplikationsliknande räknesätt. Vi räknar upp några av de viktigaste egenskaperna hos faltningen. Man känner igen många som analoga med den "vanliga" multiplikationen,

- *Faltning är ett kommutativt räknesätt.*
Genom att i integralen substituera $t - \tau$ mot τ (genomför detta) och sedan byta plats på faktorerna i integranden får man

$$x*y = y*x. \quad (7.7)$$

- δ -funktionen spelar rollen av en enhet – om man "multipliserar", d.v.s faltar, med den så "händer ingenting":

$$(x*\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = x(t), \text{ eller}$$

$$x*\delta = \delta*x = x. \quad (7.8)$$

- *Faltning är linjär i varje "faktor", den så kallade distributiva lagen gäller:*
För godtyckliga $x(t)$, $y_1(t)$ och $y_2(t)$ samt konstanter a_1 och a_2 gäller

$$x*(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1(x*y_1) + a_2(x*y_2). \quad (7.9)$$

Båda leden kan nämligen skrivas

$$x(\tau) (a_1 y_1(t-\tau) + a_2 y_2(t-\tau)) d\tau.$$

Detta kan utan vidare utsträckas till summor med ett godtyckligt ändligt antal termer:

$$x * \sum_{n=0}^N a_n y_n = \sum_{n=0}^N a_n (x*y_n). \quad (7.9')$$

och, med lämpliga krav på konvergensförloppet³⁵, så gäller motsvarande också för oändliga serier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n * \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x_n * y_n). \quad (7.9'')$$

Om funktionen y förutom av t beror av en ytterligare parameter, nedan kallad f , så gäller i samma anda att

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) * \int_{-\infty}^{\infty} y(t, f) df = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * y(t, f) df. \quad (7.9''')$$

Båda leden kan nämligen skrivas som dubbelintegralen

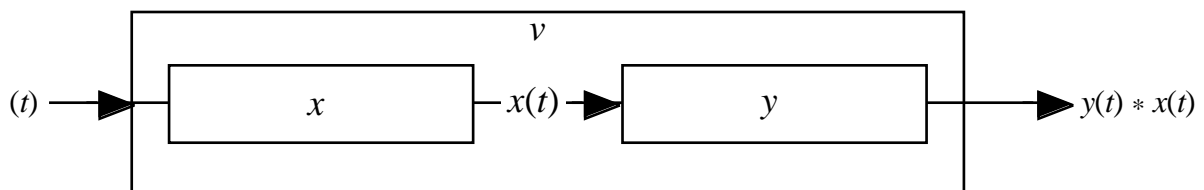
$$\int_{\mathbf{R}^2} x(\cdot) y(t - \cdot, f) d\cdot df.$$

\mathbf{R}^2

- *Sammansättning av LTI-system och faltningar*

Om två LTI-system sätts efter varandra (seriekopplas), så kommer det sammansatta systemet också att vara av LTI-typ. Man kan fråga sig vilket det sammansatta systemets pulssvar då kommer att vara uttryckt i delsystemens pulssvar. Vi reder ut detta:

Låt delsystemens pulssvar vara $x(t)$ och $y(t)$ och det sammansatta vara $v(t)$. Skicka in signalen (t) i det sammansatta systemet. Utsignal från detta är då $v(t)$. Följande diagram visar vad som händer ”på vägen” i delsystemen:

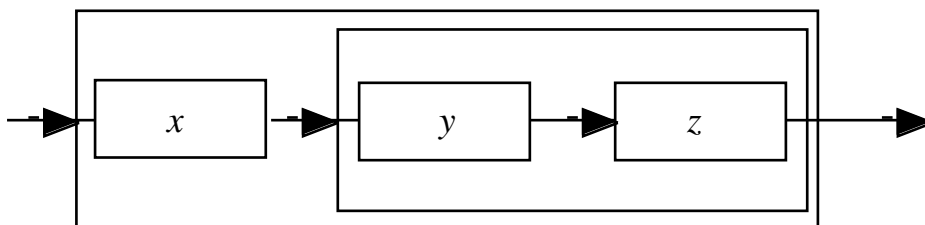


Sammansättningens pulssvar måste alltså vara faltningen av delsystemens pulssvar

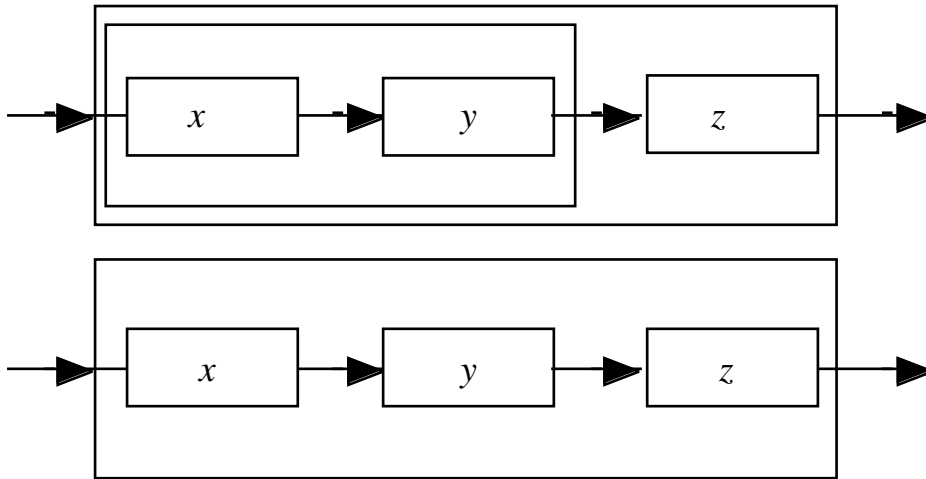
$$v(t) = y(t) * x(t) = x(t) * y(t)$$

- *Faltning är ett associativt räknesätt*

Sätter man tre LTI-system med pulssvar x , y och z efter varandra, så spelar det ingen roll i vilken ordning uppbyggnaden sker: Systemen



³⁵ Preciseras inte här. För alla signalteoretiskt ”rimliga” situationer är sådana krav uppfyllda.



är identiska. Enligt föregående punkt så har man därför

$$(x * y) * z = x * (y * z). \quad (7.10)$$

Övningar: 7.1 – 7.4, sid. 77.

7.3. Transformens egenskaper

De allmänna egenskaperna hos den tidskontinuerliga transformen är av samma slag som för fourierserierna (FS). Exempelvis är fouriertransformen också linjär:

$$ax(t) + by(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} aX(\omega) + bY(\omega) \quad (a \text{ och } b \text{ konstanter})$$

Behöver man transformera (eller återtransformera) en linjär kombination av termer så räcker det alltså att man transformerar varje term för sig varefter man linjärkombinerar resultaten.

Fouriertransformens viktigaste egenskaper finns listade exempelvis i . Härledningarna är i de flesta fall rättframma. Exempelvis inses att

om $x(t)$ är en $\begin{matrix} \text{jämn} \\ \text{udda} \end{matrix}$ funktion, så är också $X(\omega)$ en $\begin{matrix} \text{jämn} \\ \text{udda} \end{matrix}$ funktion,

genom att enligt (7.2)

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = X(\omega), \text{ dvs } X \text{ är jämn.}$$

(a) Dualitet

Sambanden (7.2) och (7.3) är anmärkningsvärt symmetriska till sin konstruktion, man säger att de är *duala*: Särskilt tydligt blir detta om vi använder varvfrekvensen f som variabel. Analyssambandet (7.3') tillämpat på funktionen $X(2\pi f)$ – alltså fouriertransformen av x med f -variabeln bytt mot t – ger att *dess* fouriertransform är

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(2-t) e^{i(-\omega)(2-t)} dt = x(-f),$$

Om man istället byter ω -variabeln mot t så har man förstås en liknande relation, men faktorn 2 dyker då upp på annat sätt. Analyssambandet (7.3) ger:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{i(-\omega/2)t} dt = 2 \cdot x(-\omega/2)$$

Det är naturligt att upprätta tabeller över funktioner och deras transformers. Se t.ex. i Dualitetssegenskaperna ovan kan i sådana tabeller skrivas:

	Funktion	Transform, ω -var.	Transform, f -var.
Om	$x(t)$	$Z(\omega)$	$z(f)$
så gäller	$Z(\omega)$	$2 \cdot x(-\omega/2)$	$2 \cdot x(-2/f)$
	$z(f)$	$x(-\omega/(2f))$	$x(-f)$

Exempel 7.1:

a. Man vill bestämma fouriertransformen till funktionen $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Direkt beräkning via analyskvationen

ter sig svår eftersom integranden $\frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2}$ saknar elementär primitiv funktion, så rutinmetoderna för integrallösning går inte att använda.

I en tabell över fouriertransformer (ω -varianten) hittar man dock att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} dt \stackrel{\mathcal{FT}}{=} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (\text{om } a > 0).$$

Dualitetsprincipen ger då (välj $a = 1$ och låt $\frac{1}{1+t^2}$ spela rollen av $Z(\omega)$) att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \stackrel{\mathcal{FT}}{=} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-|-\omega|} = e^{-|\omega|}.$$

b. I en tabell av f -typ hade man istället hittat att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} dt \stackrel{\mathcal{FT}}{=} \frac{2a}{a^2 + 4f^2} \quad (\text{om } a > 0).$$

Dualitetsprincipen ger då att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + 4f^2} df \stackrel{\mathcal{FT}}{=} e^{-a|t|} = e^{-a|f|}.$$

Speciellt om $a = 2$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + 4f^2} df \stackrel{\mathcal{FT}}{=} e^{-a|f|}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \stackrel{\mathcal{FT}}{=} e^{-2|f|},$$

d.v.s. den sökta transformen är $e^{-2|f|}$.

(b) -pulser Konstanter

Om $x(t) = \delta(t)$ så är $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^0 = 1$. Dualiteten (obs $\delta(t)$ är en jämn funktion) ger

omedelbart att om $x(t) = 1$ så är $X(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$. Väljer man ”varvfrekvensen” f som variabel på transformsidan, så får man den litet snyggare transformen $X(f)$. I tabellform:

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
1.	$\delta(t)$	1	1
2.	1	$2\pi \delta(\omega)$	$\delta(f)$

(c) Translation Multiplikation med harmonisk svängning

Ett par duala allmänna egenskaper är

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
	$x(t)$	$X(\omega)$	$X(f)$
1.	$e^{i\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$	
2.	$e^{2\pi i a t} x(t)$		$X(f - a)$
3.	$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} X(\omega)$	$e^{-2\pi i f t_0} X(f)$

Man har nämligen för fouriertransformen av $e^{i\omega_0 t} x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = X(\omega - \omega_0),$$

vilket är påståendet 1 i tabellen. Påståendet 3 är det duala till 1 (och 2).

Kombineras detta med resultatet i (b) får man

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
4.	$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$	$e^{-2\pi i f t_0}$
5.	$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	
6.	$e^{2\pi i f_0 t}$		$\delta(f - f_0)$

Speciellt så gäller för de trigonometriska funktionerna

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
7.	$\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)$	$e^{i\omega t_0} + e^{-i\omega t_0} = 2 \cos(\omega t_0)$	$e^{2\pi i f t_0} + e^{-2\pi i f t_0} = 2 \cos(2\pi f t_0)$
8.	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$	
9.	$\cos(2\pi f_0 t)$		$\pi (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))/2$

och

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
10.	$(t + t_0) - (t - t_0)$	$e^{i t_0} - e^{-i t_0} = 2i \sin(t_0)$	$e^{2 i t_0 f} - e^{-2 i t_0 f} = 2i \sin(2 t_0 f)$
11.	$\sin(t_0 t)$	$-i((-\infty - t_0) - (\infty + t_0))$	
12.	$\sin(2 f_0 t)$		$-i((f - f_0) - (f + f_0))/2$

(d) Skalning med faktor a Skalning med faktor 1/a.
Tidsrevertering Frekvensrevertering

En annan självdual egenskap handlar om vad som sker med skalning av variablerna: Om tidsvariabeln t skalas om till at ($a > 0$), så skalas både transformvärde och frekvensvariabel om med faktorn $1/a$. Om tidsskalan kastas om (tidsrevertering) så kastas även frekvensskalan om:

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
	$x(t)$	$X()$	$X(f)$
1.	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X \frac{f}{a}$	$\frac{1}{a} X \frac{f}{a}$
2.	$\frac{1}{a} x \frac{t}{a}, a > 0$	$X(a)$	$X(af)$
3.	$x(-t)$	$X(-)$	$X(-f)$

Exempelvis gäller fouriertransformen av $x(at)$; för

$$x(at) e^{-i \omega t} dt = \text{Subst } a = \frac{1}{a} \int x(\tau) e^{-i \omega \tau} \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} X \frac{\omega}{a} .$$

(e) Pulståg Pulståg

Funktionerna $(t - n)$ har enligt ovan transformerna $e^{-2 i n f}$. Summerar man dessa, så får man att

$(t - n)$ har transformen

$$e^{-2 i n f} = \int e^{2 i n f} = \text{Enligt sambandet (5.2) sid 40} = \int (f - n)$$

Funktionen $(t - n)$ är alltså sin egen fouriertransform (f -varianten)! Om istället väljs som

frekvensvariabel så får man transformen $(f/(2\pi) - n) = 2\pi (f - 2\pi n)$

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$(t - n)$	$2\pi (f - 2\pi n)$	$(f - n)$

Sampling vid tidpunkterna $t = nT$ svarar mot multiplikation med den generaliserade funktionen

$$(t - nT) = \int (T(t/T - n)) = \int (at) = (t)/a = \frac{1}{T} \int (t/T - n).$$

Transformen för denna funktion är enligt skalningsegenskapen ($a = 1/T$):

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
2.	$\text{rect}(t/T - n)$ $n = -$	$2 \text{ sinc}(f - n/T)$ $n = -$	$\text{rect}(f - n/T)$ $n = -$
3.	$\text{rect}(t - nT)$ $n = -$	$2 \text{ sinc}(Tf - n) =$ $2/T \text{ sinc}(f - n/T)$ $n = -$	$\text{rect}(Tf - n) =$ $1/T \text{ rect}(f - n/T)$ $n = -$

(f) rect sinc

$$P/2$$

Integralen $d_P(\omega) = \int_{-P/2}^{P/2} e^{i\omega t} dt$, som beräknades avsnitt 7.1.2, är också en fouriertransform³⁶, nämligen den

av en funktion som är $= 1$ i intervallet $-P/2 < t < P/2$ och $= 0$ f.ö., d.v.s. av funktionen $\text{rect}(t/P)$. Enligt beräkningarna avsnitt 7.1.2 så har man:

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
	1. $\text{rect}(t/P)$	$P \text{ sinc}(P\omega/(2\pi))$	$P \text{ sinc}(Pf)$
Speciellt	2. $\text{rect}(t)$		$\text{sinc}(f)$
	3. $\text{rect}(t/(2\pi))$	$2 \text{ sinc}(\omega)$	
Dualt	4. $\text{sinc}(Pt)$	$\frac{1}{P} \text{rect}(\omega/(2\pi P))$	$\frac{1}{P} \text{rect}(f/P)$
och	5. $\text{sinc}(t/(2\pi))$	$2 \text{ rect}(\omega)$	$2 \text{ rect}(2f)$
	6. $\text{sinc}(t)$	$\text{rect}(\omega/(2\pi))$	$\text{rect}(f)$

(g) Steg- och signumfunktionerna

Ett intrikatare problem är att beräkna transformerna för stegfunktionen:

$$u(t) = 1, \text{ om } t > 0 \text{ samt } = 0, \text{ om } t < 0$$

och den besläktade signumfunktionen:

$$\text{sign}(t) = \{1, \text{ om } t > 0 \text{ samt } = -1 \text{ om } t < 0\} = 2u(t) - 1.$$

För kännedom meddelas att man kan visa att

³⁶ Obs att $d_P(\omega)$ är en jämn funktion.

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$u(t)$	$\frac{1}{i} + ()$	$\frac{1}{2jf} + \frac{1}{2} (f)$
2.	$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{i}$	$\frac{1}{if}$

(h) Multiplikation Faltning

De komplexa exponentialfunktionerna är, som vi sett tidigare, egenfunktioner till LTI-systemen med fouriertransformen för pulssvaret som egenvärde. Eller uttryckt med hjälp av faltning:

$$x(t) * e^{i\omega t} = X(\omega) e^{i\omega t},$$

$$y(t) * e^{i\omega t} = Y(\omega) e^{i\omega t}.$$

Låter vi $Z(\omega)$ stå för transformen av $x(t) * y(t)$, så har vi (för fixt men godtyckligt ω och variabelt t):

$$\begin{aligned} Z(\omega) \cdot e^{i\omega t} &= (x(t) * y(t)) * e^{i\omega t} = \text{Associativa lagen för faltning} = x(t) * (y(t) * e^{i\omega t}) \\ &= x(t) * Y(\omega) \cdot e^{i\omega t} = Y(\omega) \cdot (x(t) * e^{i\omega t}) \\ &= Y(\omega) \cdot X(\omega) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Division med faktorn $e^{i\omega t}$ ger resultatet

$$Z(\omega) = Y(\omega) \cdot X(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega).$$

Faltning av två signaler svarar alltså mot multiplikation av deras fouriertransformer!

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$	$X(f) \cdot Y(f)$
2. Dualt	$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(\omega)$	$(X * Y)(f)$

(i) Derivering Multiplikation med variabel

Deriverar man analyskvationen får man $x'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

där man avläser att derivatans fouriertransform $= \int_{-\infty}^{\infty} i\omega X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$:

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$\frac{d}{dt} x(t)$	$i\omega X(\omega)$	$2\pi jf X(f)$
2. Dualt	$t x(t)$	$i \frac{d}{d\omega} X(\omega)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$

För högre derivator får man motsvarande:

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(i)^n X(s)$	$(2\pi f)^n X(f)$
2. Dualt	$t^n x(t)$	$i^n \frac{d^n}{ds^n} X(s)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d^n}{df^n} X(f)$

Av särskilt intresse är

(j) Funktioner med rationella fouriertransformer

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1. Då n heltal ≥ 0	$t^n u(t)$	$(i)^n X(s)$	$(2\pi f)^n X(f)$
2. Då $a > 0$	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{a + i\omega}$	$\frac{1}{a + 2\pi if}$
3. och n heltal ≥ 1	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{(a + i\omega)^n}$	$\frac{1}{(a + 2\pi if)^n}$
4. Då $a < 0$	$e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{a - i\omega}$	$\frac{1}{a - 2\pi if}$
5. och n heltal ≥ 1	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{(a + i\omega)^n}$	$\frac{1}{(a + 2\pi if)^n}$
6.	$\text{sign } t$	$\frac{2}{i\omega}$	$\frac{1}{if}$
7. Då n heltal ≥ 1	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \text{sign } t$	$\frac{2}{(i\omega)^n}$	$\frac{2}{(2\pi if)^n}$
8. Då $a > 0$	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
9. Då $a > 0$	$e^{-a t } \text{sign } t$	$-\frac{2i\omega}{a^2 + \omega^2}$	$-\frac{4\pi if}{a^2 + (2\pi f)^2}$

Andra rationella funktioner kan man återtransformera genom att kombinera informationen i tabellen med partialbråksuppdelning, linearitet och förskjutningsegenskapen (c) ovan:

Exempel 7.2

a. Bestäm $x(t)$ så att $X(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$.

Lösning: Nämnaren har nollställena $s^2 = -1$ och $s^2 = -2$ och kan därför faktoruppdelas:

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2).$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{2}{4 + 3s^2 + 2} = \frac{2}{2 + 2} - \frac{1}{2 + 1}$$

Låter vi parametern a i (j8) ovan spela rollen av $\sqrt{2}$ respektive 1, så ger tabellinformationen att det första bråket är transform av $2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|}$ och det andra av $\frac{1}{2} e^{-|t|}$. Man får

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|} - \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

b. Bestäm $x(t)$ så att $X(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}$.

Lösning: Kvadratkomplettering av nämnaren ger $(s + 2)^2 + 1$. $X(s)$ har alltså formen $Y(s + 2)$ där $Y(j) = \frac{1}{2 + 1}$. Man har då

och via förskjutning

$$\frac{1}{(s + 2)^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} e^{i(-2)t} \cdot \frac{1}{2} e^{-|t|} = x(t)$$

c. Bestäm $x(t)$ så att $X(s) = \frac{1}{s^2 - 5s - 6i}$.

Lösning: På vanligt sätt bestämmer man nollställena till andragradspolynomet i nämnaren. De är $s = -2i$ och $s = -3i$. Nämnaren kan därför skrivas $s(s + 2i)(s + 3i)$. Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{s^2 - 5s - 6i} = \frac{1}{s(s + 2i)(s + 3i)} = \frac{1}{s + 3i} - \frac{1}{s + 2i}$$

Vi får

$$\frac{1}{s + 3i} \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} e^{-3t} u(t)$$

$$\frac{1}{s + 2i} \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} e^{-2t} u(t)$$

varför

$$X(s) \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} x(t) = (e^{-3t} - e^{-2t}) u(t) = \begin{cases} e^{-3t} - e^{-2t}, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

d. Bestäm $x(t)$ så att $X(s) = \frac{4 + 1}{2 + 1}$.

Lösning: Nämnarens grad är inte lägre än täljarens. Division med rest ger då omskrivningen

$$\frac{4 + 1}{2 + 1} = 2 - 1 + \frac{2}{2 + 1} \quad (\text{Kontrollera!})$$

Enligt (j1) och (j8) har man

$$\begin{aligned} 2 & \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} 2\delta(t) \\ 1 & \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} \delta(t) \\ \frac{2}{2 + 1} & \xrightarrow{\mathcal{FT}^{-1}} e^{-|t|} \end{aligned}$$

Detta ger att

$$x(t) = 2\delta(t) - \delta(t) + e^{-|t|}$$

Övningar: 7.5 – 7.7, sid. 77.

(k) Transform av primitiv funktion

Den primitiva funktionen $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ kan ses som en faltning: $x(\tau) d\tau = x(\tau) u(t - \tau) d\tau = (x * u)(t)$, Dess transform är alltså $X(\omega) \cdot \frac{1}{i\omega} + X(0) \delta(\omega)$.

(l) Sampling med sampelavstånd T ($1/T$)-periodisk fortsättning

Om en signal $x(t)$ samplas vid tidpunkterna $t = nT, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, så ges (se §5.3, sid 41) motsvarande sampelfunktion av

$$x_{\text{sampel}}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Eftersom enligt (e3) med f som variabel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$$

och produkt svarar mot faltning, så är sampelsignalens transform:

$$X_{\text{sampel}}(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - n/T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T).$$

Man ser här att om frekvensvariabeln f används på transformsidan:

	Funktion	Transform (f)
	$x(t)$	$X(f)$
1.	Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$1/T$ -periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(f)$
2. Dualt	L -periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $1/L \cdot X(f)$ med sampelavstånd $1/L$

Med vinkelfrekvensen ω som variabel får man det mindre symmetriska

	Funktion	Transform (ω)
	$x(t)$	$X(\omega)$
3.	Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$2\pi/T$ -periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(\omega)$
4. Dualt	L -periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $2\pi/L \cdot X(\omega)$ med sampelavstånd $2\pi/L$

Vid sampling är alltså transformens värde för en frekvens f (alt. ω) proportionell mot summan av värdena av X i de många frekvenserna på avståndet n/T från f (alt. $2\pi n/T$). Dessa olika X -värden kan alltså inte särskiljas om man bara känner till X_{sampel} .

Exempel 7.3: Vilken är den 1-periodiska fortsättningen av $x(t) = \text{sinc } t$?

Att direkt summera $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t - n)}{(t - n)}$ ter sig som en svår uppgift.

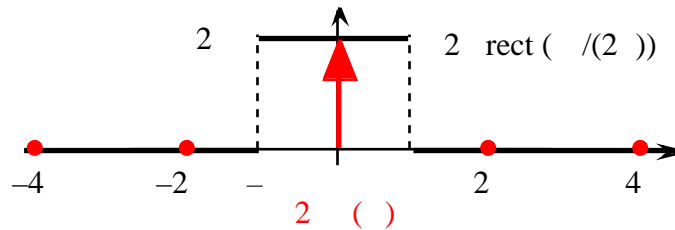
Om man istället noterar att

$$\text{sinc } t \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \text{rect} (t / (2)),$$

så utsäger sambandet (1.4) ovan, att fouriertransformen av $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} (t - n)$ är samplingen av $2 \text{rect} \frac{t}{2}$ med sampelavståndet 2. Men

$$2 \text{rect} \frac{t}{2} = \begin{cases} 2, & \text{om } |t| < 1, \\ 0, & \text{om } |t| > 1, \end{cases}$$

varför sampelvärdet för $t = 0$, är $= 2$, medan alla alla övriga är $= 0$.



Vi har alltså

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} (t - n) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} 2 \text{rect} (t / 2),$$

eftersom

$$2 \text{rect} (t / 2) \stackrel{\mathcal{FT}^{-1}}{\longleftrightarrow} 1$$

så medför detta att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} (t - n) = 1 \text{ (konstant!)}$$

7.4. Fourierserierna som specialfall av fouriertransformen

Fouriertransformen handhar i princip alla typer av signaler. Fourierserierna däremot handlar bara om periodiska signaler. Man kan då misstänka att fourierserieteori är ett speciellt fall fouriertransformteori. Att så faktiskt är fallet kan man inse så här:

Varje L -periodisk funktion $x(t)$ är den L -periodiska fortsättningen av funktionen:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t), & \text{om } |t| < L/2, \\ 0, & \text{om } |t| > L/2. \end{cases}$$

Enligt 4:e punkten i tabellen i (1) ovan kommer fouriertransformen $X(\omega)$ att vara samplingen av $\frac{1}{L} X_0(\omega)$ i punkterna $\omega = \frac{2\pi n}{L}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, d.v.s.

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} X_0(\omega - 2\pi n/L).$$

Så när som på en gemensam faktor 2π , så är den n :te koefficienten i detta pulståg,

$$\frac{1}{L} X_0 \left(\frac{2\pi n}{L} \right) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t) e^{-i 2\pi n t / L} dt = c_n,$$

tydligt identisk med den n :te fourierseriekoefficienten för $x(t)$

Syntesekvationen (7.3) för fouriertransformen ger sedan

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(-2n/L \right) e^{i \left(-2n/L \right) t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(-2n/L \right) e^{i \left(-2n/L \right) t} dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2in/L},$$

vilket är syntesekvationen för fourierserier.

7.5. Parsevals relation för fouriertransformer

För signaler $x(t)$ där

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

är konvergent – d.v.s. de som har en (ändlig) total energi³⁷ – kan man också visa en ”Parsevalsk” relation. Speciellt enkel är den om frekvensvariabeln f väljs på transformsidan:

”Vektorns längd” i kvadrat = ”Summan” (läs *integralen*) av beloppskvadraterna på ”koordinaterna” $X(f)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \tag{7.14}$$

För ω -variabeln får man istället

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \tag{7.14'}$$

Exempel 7.4

För funktionen $x(t) = \text{rect}(t)$ är normkvadraten (totalenergin)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1^2 dt = 1,$$

och vi vet (se §7.3(f)) att $X(f) = \text{sinc } f$. Parsevals relation^{-1/2} utsäger då att

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 f df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 f}{f^2} df.$$

Efter litet hyfsning (sätt $f = \pi u$) kan detta skrivas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2}{2} du = \dots$$

³⁷ Alla funktionerna som vi betraktar i den matematiska modellen för signalteorin är inte av det slaget. Exempelvis är den totala energin hos konstanterna 0 och hos δ -pulserna inte ändlig och inte heller hos periodiska funktioner i allmänhet.

Övningar: 7.8 – 7.17, sid. 78 - 79.

7.6. Litet om approximation av fouriertransformer, en orientering

I en ideal värld skulle fouriertransformen av en signal $x(t)$ som man vill studera kunna beräknas enligt sin definition:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

I realiteten är $x(t)$ nästan aldrig helt känd – dels kan man kanske inte iaktta signalen under hela sin varaktighet, dels detekteras signalen inte i kontinuerlig tid utan bara vid vissa sampeltidpunkter. Man behöver därför rent allmänt göra en analys hur dessa två inskränkningar (trunkering respektive sampling) påverkar möjligheterna att skaffa fram goda approximationer till $X(\omega)$. Frågeställningen är inte alldeles enkel, så den analysen blir här i stor utsträckning informell.

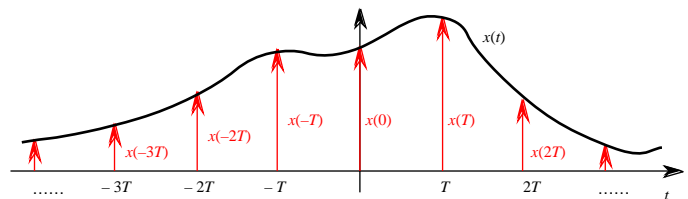
I. Trunkering

Med hjälp av rect-funktioner kan vi koncist beskriva trunkeringar. Om signalen $x(t)$ ”klippas av” genom att den bara iaktas i intervallet $-P/2 < t < P/2$, så kan den trunkerade signalen $\hat{x}_P(t)$ skrivas

$$\hat{x}_P(t) = x(t) \text{rect}(t/P).$$

II. Sampling

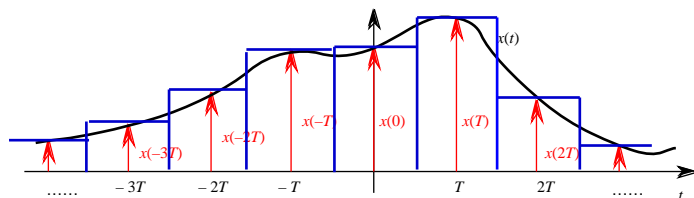
Samplas en signal $x(t)$ vid tiderna $t = nT, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ så kan motsvarande sampelvärden sammanfattas i ett pulståg



$$\hat{x}_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

som i figuren ovan. Lägg märke till att $\hat{x}_S(t)$ är produkten av $x(t)$ med en speciell funktion som är oberoende av $x(t)$ – enhetspulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$



Samtidigt kan funktionen $\hat{x}_T(t) = T \cdot \hat{x}_S(t)$ för små T uppfattas som en slags approximation till $x(t)$. Man har nämligen för godtyckliga integrationsintervall (se figuren):

$$T \cdot \hat{x}_S(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T x(nT) \text{rect}(t - nT) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T x(nT) \text{Riemannsumma} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt.$$

Detta kan tolkas som att medelimpulsena för de båda signalerna $x(t)$ och $\hat{x}_T(t)$ överensstämmer väl över godtyckliga intervall (om T är tillräckligt litet).

III. Trunkering och sampling

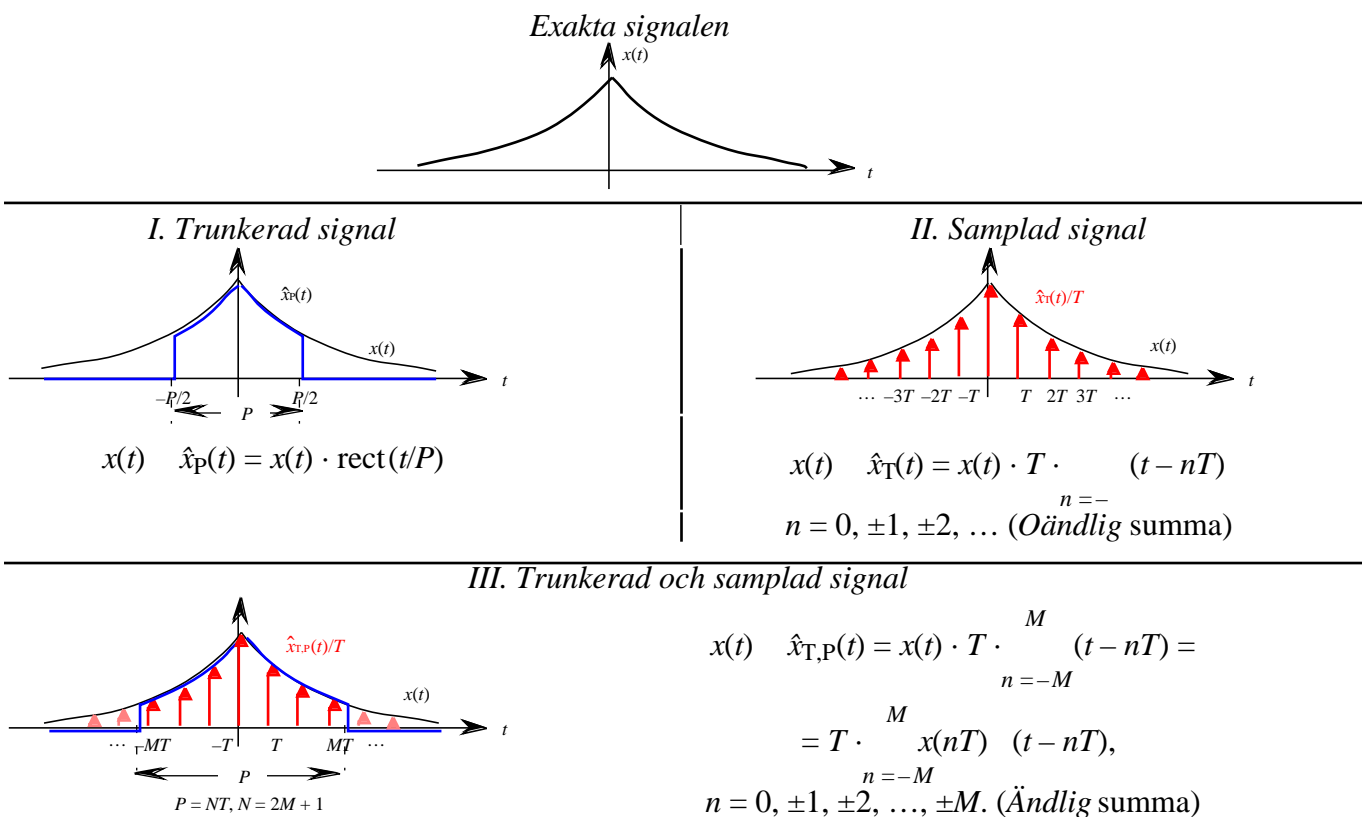
I mera realistiska modeller för uppmätning av signaler både samplar och trunkerar man. Om signalen samplas vid de $2M + 1$ tidpunkterna $t = nT, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$, så kan mätningarna beskrivas av pulståget

$$\hat{x}_{T,P}(t) = x(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^M \delta(t - nT),$$

där P får stå för trunkeringsintervallets längd,

$$P = NT, \text{ där } N = 2M + 1 \text{ är antalet sampel.}$$

När det gäller den formelmässiga beskrivningen har vi sammanfattningsvis:



Fouriertransformerna för $\hat{x}_P(t)$, $\hat{x}_T(t)$ och $\hat{x}_{T,P}(t)$ kan misstänkas approximera fouriertransformen för $x(t)$ – i varje fall om P är ”tillräckligt stort” och T är ”tillräckligt litet”. Sambanden ovan kan användas för att närmare analysera hur parametrarna T och P påverkar det hela.

För detta är det nyttigt att hålla följande fakta i minnet.³⁸

$$\begin{aligned} x(t) \cdot y(t) & \quad \mathcal{FT} \quad X(f) * Y(f), \\ x(t) * y(t) & \quad \mathcal{FT} \quad X(f) \cdot Y(f), \\ (t - a) & \quad \mathcal{FT} \quad e^{-2\pi i a f} \end{aligned}$$

³⁸ Vi föredrar här att använda varvfrekvensen f i stället för vinkelfrekvensen ω , $f = \omega / (2\pi)$.

$$T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-nT}{P}\right) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P \text{sinc}(P(f-n/T))$$

Fall I. Fel från trunkering

Man har $\hat{x}_P(t) = x(t) \cdot \text{rect}(t/P) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \hat{X}_P(f) = X(f) * P \text{sinc}(Pf)$

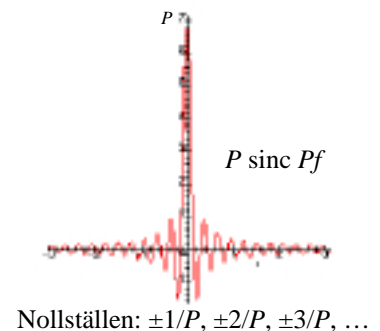
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T) P \text{sinc}(P(f - n/T))$$

En heuristisk tolkning av uttrycket för transformen kan se ut så här: Nyssnämnda faltning kan ses som att man ersätter $X(f)$ med ett glidande medelvärde där funktionen $P \text{sinc}(Pf)$ anger vilken "vikt" man ger det funktionsvärde i punkten som ligger enheter ifrån f .³⁹ Eftersom $P \text{sinc}(Pf)$ för stora P väsentligen är 0 bara i närheten av $f = 0$, så kommer man då att bilda ett slags mycket "lokala" medelvärden – grafen för $\hat{X}_P(f)$ blir en "blurred" variant av grafen för $X(f)$.

På grund denna medelvärdesbildning kan felen förväntas bli större i punkter där $X(f)$ varierar kraftigt än i punkter där $X(f)$ är relativt konstant.

Eftersom $1/P$ är ett mått på bredden hos huvudloben hos viktsfunktionen – dess nollställen närmast origo är $\pm 1/P$ – kan man via den parametern få en uppfattning om hur nära två frekvenstoppar kan få ligga för att de efter medelvärdesförfarandet fortfarande skall gå att "känna igen". Storheten $1/P$ tas som ett ingenjörsmässigt mått på *frekvensupplösningen*.

Om man exempelvis vill mäta upp frekvensen hos en ton med en önskad noggrannhet på 0,01 Hz så bör mätningens varaktighet åtminstone vara bortåt $1/0,01 = 100$ sekunder.



Fall II. Fel från sampling

Här har vi $\hat{x}_T(t) = x(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \hat{X}_T(f) = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n/T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-n/T)$

Detta betyder att $\hat{X}_T(f)$ exakt är den $1/T$ -periodiska fortsättningen till $X(f)$.

³⁹ Obs att vi vet att $\int_{-\infty}^{\infty} P \text{sinc}(Pf) df = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f) df = 1$.

För *bandbegränsade* signaler (sådana där $X(f) = 0$ utanför något ändligt frekvensintervall $|f| < B$) kan man för tillräckligt stora värden på $1/T$ ($2 \times B$) exakt rekonstruera $X(f)$ ur summan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T)$. Man har ju att $X(f) = \hat{X}_T(f)$ för f inom bandet och $= 0$ utanför.

För signaler som inte är bandbegränsade, men där spektret avtar "snabbt" mot 0 då $f \rightarrow \pm \infty$, så har man istället att $X(f) \approx \hat{X}_T(f)$, för "måttliga" f .

De felaktigheter man får då, härör från termerna $X(f - n/T)$, $n \neq 0$, i summan. Man kan alltså för ett visst f -värde utifrån enbart $\hat{X}_T(f)$ inte skilja på $X(f)$:s värden i de olika frekvenserna $f - n/T$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Detta är den s.k. *aliaseffekten*. Denna blir – återigen förutsatt att $X(f)$ avklingar "snabbt" mot 0 – mindre uttalad ju mindre sampelavståndet är.

Sampelintervallet T kan enligt detta väljas genom att man först bestämmer en "bandgräns" B ovanför vilken signalens frekvenser kan försummas,⁴⁰ sedan tar $T < 1/(2B)$.

Anmärkning: Beräkningsformlerna för hur man bestämmer $\hat{X}_T(f)$ ur sampelvärdena $x[n] = x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ blir litet enklare om man väljer sampelavståndet T som tidsenhet. Man får då analyssekvationen

$$\hat{X}_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f},$$

vilket är en 1-periodisk funktion, och motsvarande syntesekvation

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{X}_1(f) e^{j2\pi n f} df, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Tillordningen, som till talföljden $x[n]$ ordnar funktionen $\hat{X}_1(f)$, är den så kallade *tidsdiskretfouriertransformen* (TDFT:n). Den är dual till fourierserietransformen (som ju till periodiska funktioner ordnar talföljder – fourierkoefficienterna!). TDFT:n med tillhörande tabellinformation är ett bra hjälpmedel bl.a. för att analysera sampelade signaler. ■

Fall III. Fel från trunkering och sampling

Den approximation till $x(t)$ man i detta fall arbetar med är

$$x(t) \approx \hat{x}_{T,P}(t) = x(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^M \delta(t - nT), \quad \text{där } P = (2M + 1)T = NT. \quad (41)$$

Man åstadkommer det uttrycket genom att man först multiplicerar $x(t)$ med $\text{rect}_P(t)$ (d.v.s. bara betraktar signalen i tidsintervallet $-P/2 \leq t \leq P/2$) och sedan multiplicerar med $T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, (d.v.s. samplar med sampelintervallet T) eller vice versa. Faltningssatsen ger då att

⁴⁰ Exempelvis kan man tillse att energiandelen, $\int_{|f| > B} |X(f)|^2 df / \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$, som ligger utanför bandet håller sig under någon godtagbar gräns.

⁴¹ Notera att N alltid är ett udda heltal i detta sammanhang.

$$\hat{x}_{T,P}(t) \stackrel{\mathcal{FT}}{=} X(f) * P \operatorname{sinc} Pf * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$$

$\hat{X}_{T,P}(f)$ åstadkoms alltså utifrån $X(f)$ genom en medelvärdesbildning (faltningen med $P \operatorname{sinc} Pf$) åtföljd av en $1/T$ -periodisk fortsättning (faltningen med $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$) eller vice versa.

Vi har vidare att

$$\hat{x}_{T,P}(t) = T \cdot \sum_{n=-M}^M x(nT) \delta(t - nT) \stackrel{\mathcal{FT}}{=} \hat{X}_{T,P}(f) = T \cdot \sum_{n=-M}^M x(nT) e^{-2\pi i n T f}$$

Som approximation till fouriertransformen $X(f)$ får vi alltså första hand detta summuttryck för $\hat{X}_{T,P}(f)$.

Storheterna P (trunkeringsintervallet) och T (sampelavståndet) väljer man lämpligen enligt principerna beskrivna i de båda fallen ovan.

Med tanke på att upplösningen är av storleksordningen $1/P$ är det rimligt att beräkna summan bara för frekvenser i sampelpunkter på avståndet $1/P$ från varandra, t.ex. $f = k/P$, k heltal. Och eftersom aliaseffekten kan göra sig gällande för frekvenser $|f| > 1/(2T) = N/(2P)$, så bör k väljas så att

$$|k| P < N/(2P) = (2M + 1)/(2P), \text{ dvs. } |k| < M.$$

Man har alltså att beräkna de N summorna

$$\hat{X}_{T,P}(k/P) = T \sum_{n=-M}^M x(nT) e^{-2\pi i n k/N}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm M \quad (42)$$

vilka sedan tjänar som approximationer till $X(k/P)$. Denna procedur transformerar tydligen talföljden $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm M$ till talföljden $\hat{X}_{T,P}(k/P)$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm M$.

Proceduren, bortsett från faktorn T :

$$X[k] = \sum_{n=-M}^M x(nT) e^{-2\pi i n k/N}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm M, N = \text{antalet termer i summorna,}$$

går under namnet *den diskreta fouriertransformen* (DFT:n).

DFT:n stora betydelse ligger i, att den kan beräknas med ett *ändligt antal* räkneoperationer. Det är denna transform som i praktiken beräknas när man bearbetar samplade och trunkerade signaler i maskinellt i datorer. De andra båda fouriertransformerna (\mathcal{FT} , \mathcal{FS}) kräver att man beräkningar oändliga serier eller integraler. Dessutom förutsätter de att man känner signalen under kontinuerlig tid, vilket man i realiteten aldrig gör.

I realistiska fall är talet N mycket stort – 100 000 eller mera är inget ovanligt – varför räknearbetet ändå kan bli betydande. En viktig innovation gjordes för inte så länge sedan (Cooley och Tukey, 1965). Man konstruerade en beräkningsalgoritm för DFT:n – Fast-Fourier-Transform – som gör det möjligt att nedbringa antalet nödvändiga räkneoperationer avsevärt:

Använder man transformationssambandet i DFT:n rätt upp och ner, så behöver man göra N st multiplikationer för varje koefficient, d.v.s. sammantaget N^2 multiplikationer. Cooley och Tukey utnyttjade en omskrivning av transformationssambanden, som för det fall att $N = N_1 \cdot N_2$, gör det möjligt att komma undan med $N \cdot (N_1 + N_2)$ multiplikationer. Bäst fungerar algoritmen om N är en 2-potens. Antalet multiplikationer blir då

42 Obs att $Tk/P = k/N$.

(högst) $2N \log_2 N$. För $N = 1024 = 2^{10}$ exempelvis, kräver en "rakt-upp-och-ner"-beräkning i allmänhet fler än 10^6 multiplikationer, medan FFT behöver högst $2 \cdot 1024 \cdot 10 = 2 \cdot 10^4$ – en besparing på närmare 98%! ⁽⁴³⁾

Övningar till kapitel 7:

($u(t)$ betecknar "the unit step function", dvs. $u(t) = 1$ om $t > 0$ och $= 0$ om $t < 0$.)

7.1 Beräkna

- | | | | |
|---|--|------------------------------------|----------------------|
| a. $e^{- t } * 1$, | b. $e^t * u(t)$, | c. $e^{-t} * u(-t)$, | d. $e^{- t } * t$, |
| e. $\text{rect}(t) * 1$, | f. $\text{rect}(t) * t$, | g. $\text{rect}(t) * t^2$, | |
| h. $\text{rect}(t) * u(t)$, (rita figur!), | i. $\text{rect}(t) * \text{rect}(t)$, (rita figur!) | | |
| j. $u(t) * u(t)$, (rita figur!), | k. $e^{-t} * \text{rect}(t)$, | l. $\{e^t \cdot u(t)\} * e^{2t}$, | |
| m. $e^{- t } * e^{jt}$ | n. $e^{- t } * \cos t$, | o. $e^{- t } * \sin t$, | p. $(t-1) * (t-1)$. |

7.2 Verifiera följande allmänna relationer (a och b är en godtyckliga reella konstanter):

- $(t-a) * y(t) = y(t-a)$,
och om $x(t) * y(t) = z(t)$
- $x(t-a) * y(t) = x(t) * y(t-a) = z(t-a)$,
- $x(t-a) * y(t-b) = z(t-a-b)$,
- $x(-t) * y(-t) = z(-t)$.

7.3 Funktionen $x(t)$ är sådan att $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ är konvergent. Verifiera följande allmänna relationer.

- $x(t) * 1 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$,
- $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt$,

och för de fall då $x(t)$ dessutom är en jämn reellvärd funktion:

- $x(t) * \cos(\omega t) = X(\omega) \cdot \cos(\omega t)$,
 - $x(t) * \sin(\omega t) = X(\omega) \cdot \sin(\omega t)$,
- (Ledning: Obs att $x(t)$ är jämn och reellvärd (om och) endast om $X(\omega)$ också är (jämn och) reellvärd.)

7.4 Vilka är relationerna motsvarande dem i 7.3c och d om $x(t)$ istället är en udda, reellvärd funktion?

7.5 Bestäm fouriertransformen med f som variabel av $\text{sinc}^2(t)$ genom att använda tabellen vid (f) ovan och produkt-faltnings-sambandet j. (Se också övning 7.1i ovan.)

7.6 a. Härled (j4) genom att kombinera (j2) och tidsrevertering (d3).

b. Härled (j9) genom att kombinera (j2) och (j4).

7.7 Använd tekniken med uppdelning i partialbråk för att bestämma funktionerna $x(t)$ som har följande fouriertransformer:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a. $\frac{1}{4 + 5t^2 + 4t}$, | b. $\frac{2}{4 + 5t^2 + 4t}$, |
| c. $\frac{i}{4 + 5t^2 + 4t}$, | d. $\frac{i}{3 + 9t^2}$, |
| e. $\frac{2}{2 + 9t^2}$. | |

⁴³ Den Cooley-Tukeyska omskrivningen är dock inte alldeles "ny", den utnyttjades redan under 1800-talets första hälft i andra, men besläktade sammanhang av Gauss.

7.8 Beräkna (gärna med användning av tabell) fouriertransformerna till

- a. $e^{-2(t-1)} u(t-1)$, b. $e^{-2|t-1|}$, c. $(t+1) + (t-1)$
d. $\frac{d}{dt} \{ u(-2-t) + u(t-2) \}$, e. $\sin(2t + \pi/4)$, f. $u(t) e^{-at} \cos bt, a > 0$,
g. $e^{-3|t|} \sin 2t$, h. $\sum_{n=0}^{\infty} a^n (t-nT), |a| < 1, T > 0$,
i. $t u(t) e^{-2t} \cos 4t$, t.ex. genom att använda resultatet från uppgift f.
j. $\text{rect}(2t-1)$, k. $e^{-|t|} \cos 2t$, l. $t \text{rect } t$,
m. $\sin t \cdot \text{rect } t$, n. $t \cdot \text{sinc } t$, o. $\cos t \cdot \text{sinc } t$,
p. $\text{sinc } t * \text{sinc } t$.

7.9 Bestäm de signaler som har följande fouriertransformer

- a. $2 \delta(t) + \delta(t-4) + \delta(t+4)$, b. $\frac{2 \sin 3(\frac{t-2}{-2})}{-2}$,
c. $\cos(4t + \pi/3)$.

7.10 Signalen $x(t)$ har transformen $X(\omega)$. Uttryck följande funktioners fouriertransformer i $X(\omega)$:

- a. $y_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$,
b. $y_2(t) = x(2t-8)$,
c. $y_3(t) = x''(t-8)$

7.11 Vilka signaler har följande fouriertransformer:

- a. $Y_1(\omega) = u(\omega-1) - u(\omega-2)$, (u är enhetsprånget),
b. $Y_2(\omega) = \cos \omega \cdot \sin 2\omega$,
c. $Y_3(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \delta(\omega-n)$.

7.12 Använd det faktum att

$$e^{-|t|} \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1+\omega^2}$$

för att bestämma fouriertransformerna till:

- a. $t e^{-|t|}$,
b. $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$. (Ledning: Använd dualiteten hos \mathcal{FT} .)

7.13 Beräkna $(\text{rect } t) * (\cos 2t + \cos t)$ genom att först fouriertransformera faltningen, förenkla resultatet och sedan återtransformera.

7.14 Bestäm signalen $x(t)$ om man vet att

$$X(\omega-1) + X(\omega+1) = G(\omega), \text{ där } G(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{om } |\omega| < 2, \\ 0 & \text{om } |\omega| > 2. \end{cases}$$

7.15 Låt $x_L(t)$ vara den L -periodiska fortsättningen av $\text{sinc } t$,

$$x_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - nL).$$

- Verfiera att $x_L(t) = \frac{1}{L}$ (konstant) om $0 < L < 2$.
- Verfiera att $x_L(t) = \frac{1}{L} \left(1 + 2 \cos \frac{2}{L} t \right)$, då $2 < L < 4$.

(Ledning: Använd samma metod som den i exempel 7.3.)

7.16 Ett idealt lågpasfilter har den egenskapen att det släpper igenom en signals alla frekvenser upp till en viss nivå L med oförändrade amplituder, medan de högre frekvenserna inte släpps igenom alls.

- Om $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega)$, uttryck med hjälp av rect -funktionen transformen $X_L(\omega)$ för den filtrerade signalen $x_L(t)$.
- Bestäm $X_L(\omega)$ då $x(t) = e^{-t} u(t)$. $u(t)$ = "enhetssprånget" (Heavisides funktion).
- Hur stor andel av signalens energi går förlorad vid filtreringen? Ge en formel för detta i det allmänna fallet och tillämpa den på det speciella fallet i b-uppgiften.
- Verifiera att den andelen för stora L approximativt är $= \frac{2}{L}$ för fallet i b-uppgiften.
- Vilken är den filtrerade signalen för signalen i b-uppgiften? Svaret får innehålla integraler.

7.17 Ur tabell har vi att fouriertransformen av e^{-at^2} är $\sqrt{\pi/a} \cdot e^{-\omega^2/(4a)}$ ($a > 0$).
Bestäm fouriertransformerna till:

- $2t e^{-t^2}$,
- $e^{-t^2} \cdot e^{-t^2}$,
- $e^{-t^2} * e^{-t^2}$.

7.18 a. Bestäm fouriertransformen till

$$f(t) = \frac{e^{iat}}{9 + t^2}, \text{ där } a \text{ är en reell konstant.}$$

b. Ett LTI-system har som pulssvarsfunktion

$$h(t) = \frac{\cos t}{9 + t^2}.$$

Vilken är systemets utsignal om insignalen är $x(t) = \sin t$?

7.19 Två LTI-system L_1 och L_2 har pulssvaren $\frac{1}{1 + t^2}$ respektive $\frac{1}{9 + t^2}$, $a, b > 0$. Dessa seriekopplas till ett nytt LTI-system L .

- Bestäm L :s pulssvar.
- Om signalen $x(t) = \frac{1}{9 + t^2}$ tas som insignal till L_1 , vilken är då utsignalen?
- Vilken är L :s utsignal om insignalen som i b-uppgiften?

7.20 Två LTI-system L_1 och L_2 har pulssvaren $e^{-at|t|}$ respektive $e^{-b|t|}$, $a, b > 0$. Dessa seriekopplas till ett nytt LTI-system L .

- Bestäm L :s pulssvar för det fall att $a = b$.
- Bestäm L :s pulssvar då $a = b$.
- Vilken utsignal får man från L om insignalen är $x(t) = \sin 2t$?

8. Svar till övningarna:

1.2 b. $x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)t}$.

1.3 b. $A_n = a_n$ och $b_n = 0$.

1.4 a. $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2i|n|}$, då $n \neq 0$, $c_0 = 0$.

b. $a_n = 0, n \neq 0, b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \neq 0$.

1.5 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ och $c_n = \frac{1}{2} x\left(\frac{t}{2}\right) e^{-in}$.

1.6 a. $c_n = \frac{(-1)^n}{2n^2}$, då $n \neq 0$, $c_0 = 0$.

b. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, a_0 = b_n = 0, n \neq 0$.

1.7 a. $\frac{\sin t/2}{t/2}$, om $t \neq 0$, 1 om $t = 0$.

b. $\frac{1}{1+i}$.

c. $\frac{1}{1-i}$.

d. $\frac{2}{1+i^2}$. (Observera att funktionen i uppgift d är summan av dem i uppgifterna b och c.)

1.8 $d_m = \frac{25\sqrt{3}}{18} \approx 2.4056, d_2 = \frac{5\sqrt{210}}{168} \approx 0.4313$.

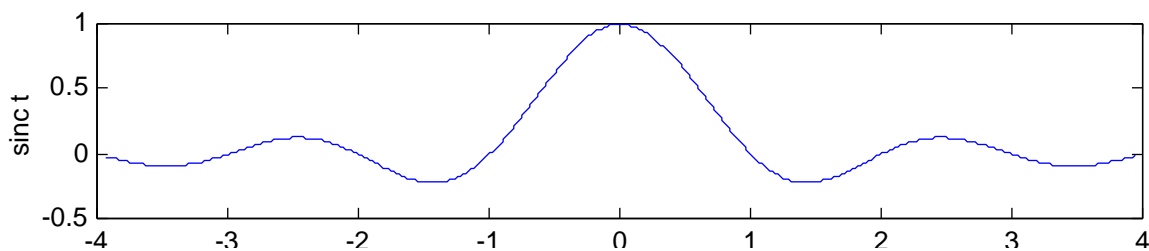
1.9 $\sqrt{2}, \sqrt{2/3}$ och $2\sqrt{2}/(3\sqrt{5})$ respektive $1, \sqrt{1/3}$ och $2/(3\sqrt{5})$.

1.10 a. $\frac{2}{6}$,

b. $\frac{4}{90}$.

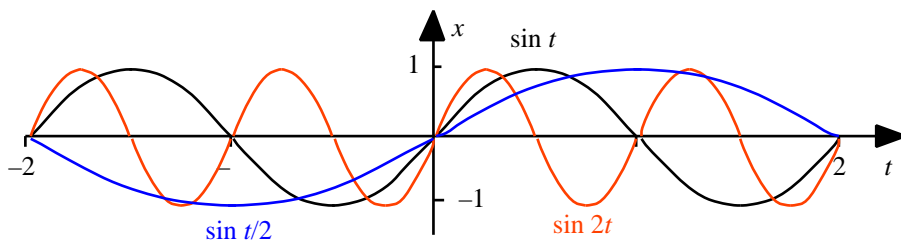
1.11 a. 2.

b. Integralens värde = 1, nollställena är heltalpunkterna utom $t = 0$.

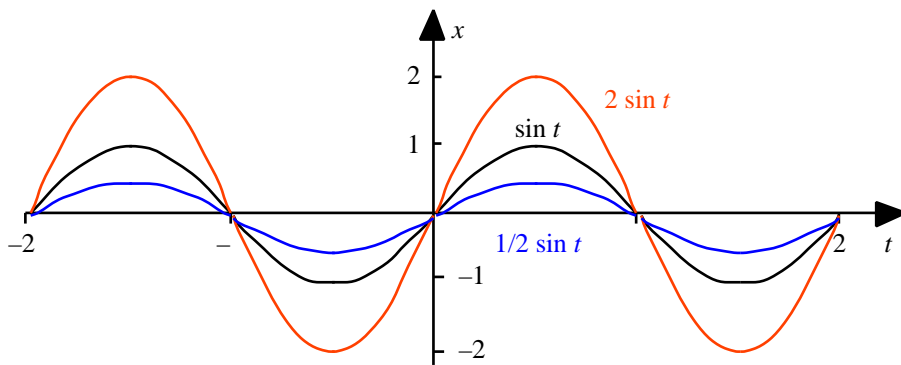


1.12 $X(s) = \frac{1}{a+i}, Y(s) = \frac{1}{a-i}, Z(s) = X(s) + Y(s) = \frac{2a}{a^2 + 1}$. Integralens värde: $\frac{2a^3}{3}$.

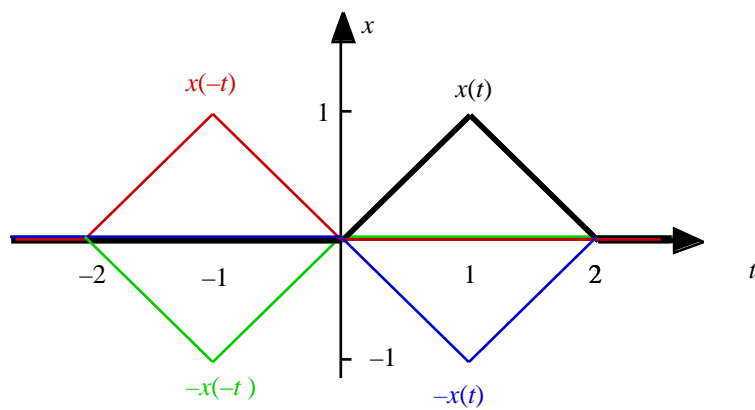
2.1 a.



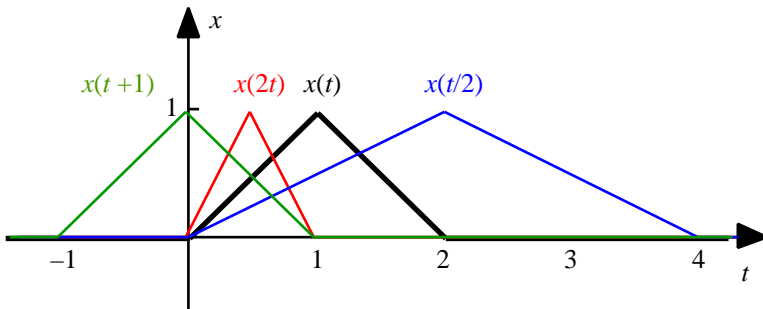
b.



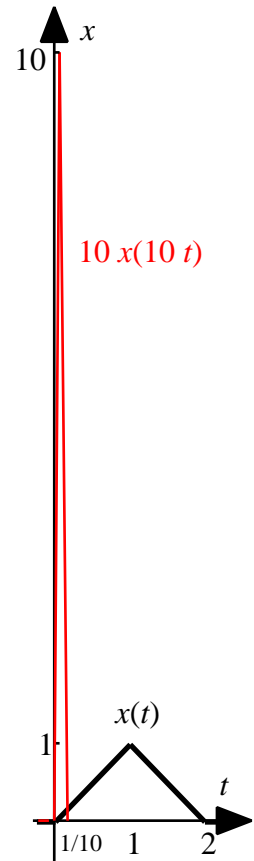
2.2 a. - d.



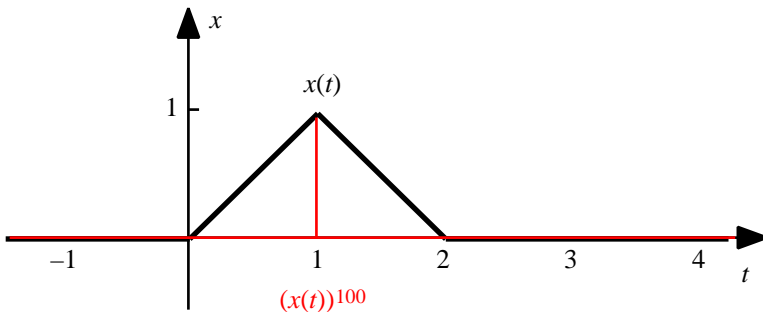
2.2 a., e. – g.



a., h.



a., i.

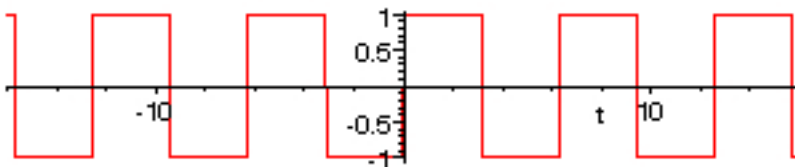


2.3 b. $x(t) = x_j(t) + x_u(t)$ $x(-t) = x_j(-t) + x_u(-t) = x_j(t) - x_u(t)$. Summation och subtraktion av dessa likheter ger $x(t) + x(-t) = 2x_j(t)$ och $x(t) - x(-t) = 2x_u(t)$.

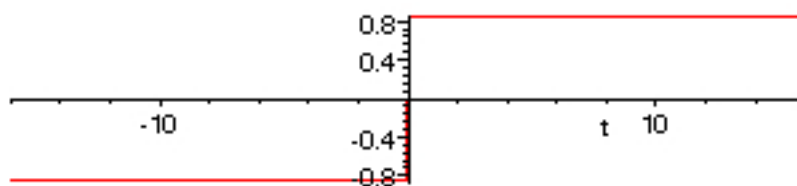
2.4 a. $\cosh t$ och $\sinh t$, b. $\cos t$ och $i \sin t$, c. $\frac{1}{1-t^2}$ och $\frac{t}{1-t^2}$.

2.5 a. Obs. att man får grafen för rect_P om man töjer (drar ihop) grafen för rect_1 med en faktor P .
 b. Obs. att man får grafen för $\text{rect}_{[a,b]}$ om man förskjuter rect_P där $P = b - a$ med $(a + b)/2$ åt höger (om detta tal > 0 , annars åt vänster).

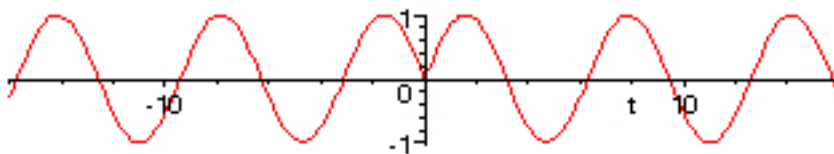
2.6 a.



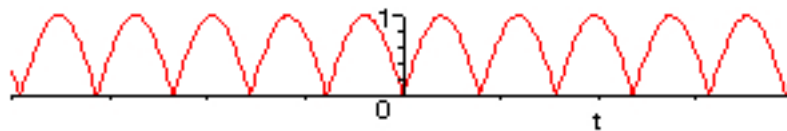
b.



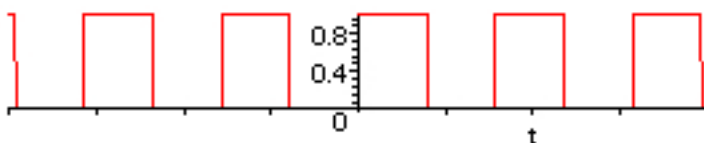
c.



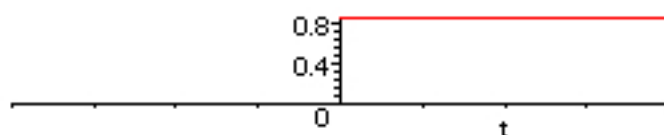
d.



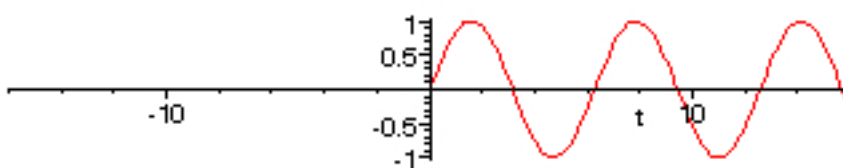
e.



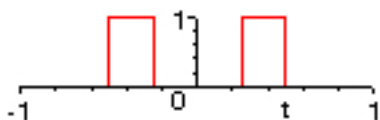
f.



g.



h och i.



3.1 a. , b. , c. 1.

3.2 Fundamentalperioden är 1.

3.3 3-periodiska fortsättningen:

$$y_3(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{då } |t| < 1, \\ 0, & \text{då } 1 \leq |t| < 1,5, \end{cases} \quad y_3(t) = y_3(t-3).$$

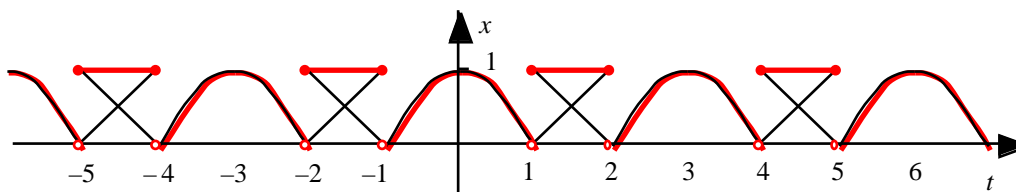
2-periodiska fortsättningen:

$$y_2(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{då } |t| < 1, \\ 0, & \text{då } 1 \leq |t| < 2, \end{cases} \quad y_2(t) = y_2(t-2).$$

1,5-periodiska fortsättningen:

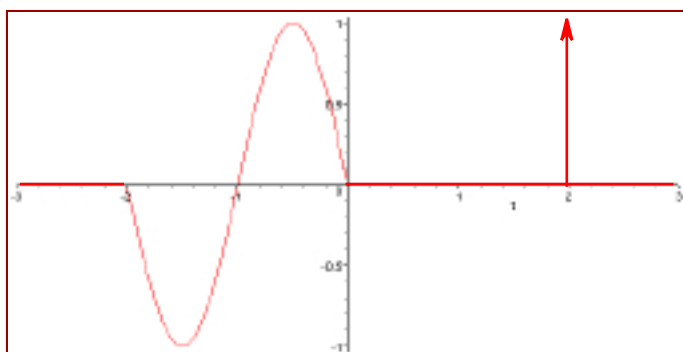
$$y_{3/2}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{då } |t| < 0,5, \\ 0, & \text{då } 0,5 \leq |t| < 0,75, \end{cases} \quad y_{1,5}(t) = y_{1,5}(t-1,5).$$

3.4

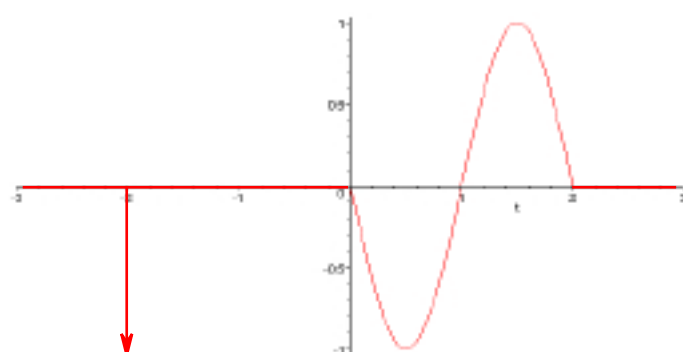


3.5 $x_1(t) = 2^{-(t-1)}$, då $0 < t < 1$.

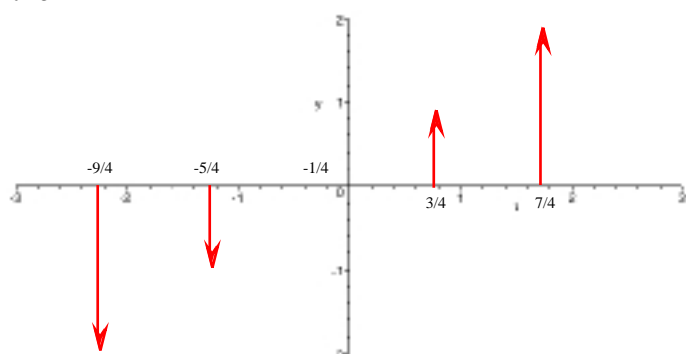
4.1a.



4.1b



4.1c



4.2a 1, b 0, c 3.

4.4 $-e^{5/4}$.

4.5a $y(t) = 2x(t)$ (dvs. förstärkning), b $y(t) = x(t - a)$ (dvs fördröjning a tidsenheter).

4.6. $(at) = -\frac{1}{a} (t)$ om $a < 0$. (Sammanfattningsvis: $(at) = \frac{1}{|a|} (t)$ om $a > 0$.)

4.7a. -4, b. 0.

4.8a. $2 (t) - (\text{sign } t) \cdot \sin t$, b. $(\text{sign } t) \cdot \cos t$,

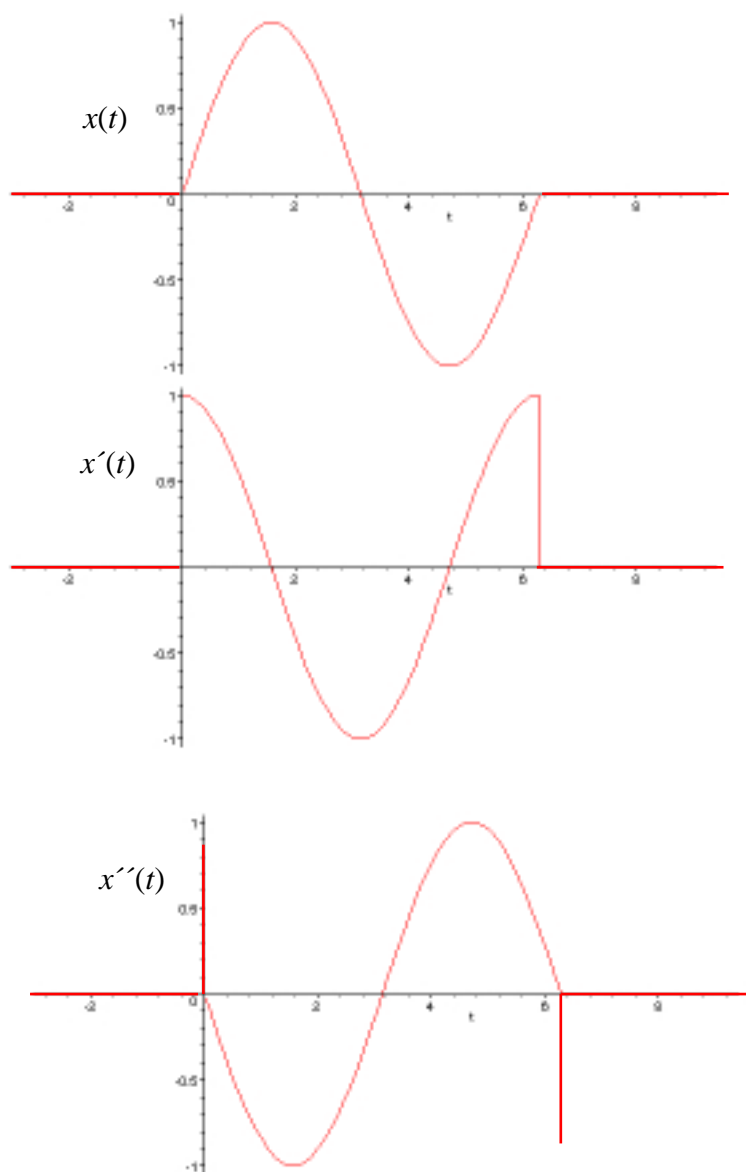
d $\{0, \text{ om } t < 0, -1 \text{ om } 0 < t < 1, 1 \text{ om } t > 1\} + (t)$

c. $(t - a) - (t - b)$,

e. $-u(t) \cdot \frac{1}{t^2} e^{-(1/t)} + (t)$.

4.9. $u(t) \cdot e^t$

4.10b.



4.10c. Pendeln befinner sig i vila då $t < 0$, får en ”enhetsknuff” åt höger vid $t = 0$, börjar svänga enligt $x(t) = \sin t$, får en ny enhetsknuff, den här gången är vänster, vid $t = 2$. Denna stoppar rörelsen helt.

4.11a. $x'(t) = \{0 \text{ om } t < -1, -1 \text{ om } -1 < t < 0, 1 \text{ om } 0 < t < 1, 0 \text{ om } t > 1\} + (t+1) - (t-1)$,
 $x''(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) - (t+1) + 2\delta(t) - (t-1)$.

b. $\frac{2}{2} (\sin + \cos - 1)$.

4.12a. $(t-) - (t+)$.

b.. $2i \sin ()$.

4.13a. $\delta(t-) - \delta(t+)$.

b. $2 \sin ()$.

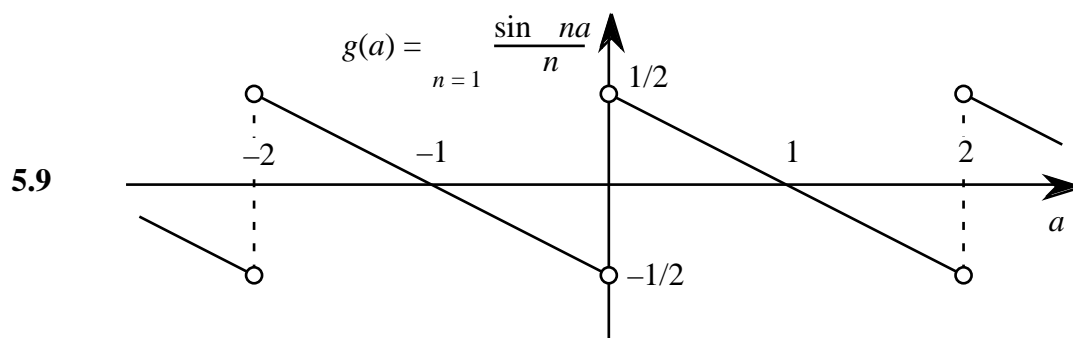
5.1 a. $1 - \frac{2}{3}^{100}$, b. $\frac{1}{5} 1 - \frac{2}{3}^{100}$.

5.2 $\frac{1}{3}$.

5.5 P . (Summan av serien i uppgift 5.3 för $t = 0$, d.v.s. summan av $2M + 1 = P$ st. 1:or.)

5.7 $\frac{1}{1+n^2} = \frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}} = \frac{e+e^{-}}{e-e^{-}} = \coth$.

5.8c. $\frac{(2N+1) - a}{2}$



5.10 $\cos(n/2) (t - n/2)$ respektive $\cos(n) (t - n) = (-1)^n (t - n)$

Följderna av sampelvärden:
respektive

$n =$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
...	0,	1,	0,	-1,	0,	1,	0,	-1,	0,	1,	0,	-1,	...
...	-1,	1,	-1,	1,	-1,	1,	-1,	1,	-1,	1,	-1,	1,	...

5.11 a. $x(nT)$, b. $x(t) dt$.

5.12 $\sin t$.

5.13 $\sin(-\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.1a För $\sin 2t$: $c_1 = 1/(2i)$, $c_{-1} = -1/(2i)$, $c_n = 0$ för övriga n .
För $\cos 2t$: $c_1 = c_{-1} = 1/2$, $c_n = 0$ för övriga n .

6.1b $c_n = 1$ för alla k . Syntesekvationen: $(t/L - n) = e^{2int/L}$.

6.2 $c_n = \frac{2}{3in}$ om n udda, $= 0$ om n jämnt $0, c_0 = \frac{1}{3}$.

6.3a. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, där $c_n = 2 \frac{(-1)^n}{n^2}$ då $n \neq 0$ och $c_0 = \frac{2}{3}$.

$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$, där $a_n = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}$ då $n \neq 0$ och $a_0 = \frac{2}{3}$.

6.3b. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n t/2}$, där $c_n = 2 \frac{\cos(n/2) - (-1)^n}{n^2}$ då $n \neq 0$ och $c_0 = \frac{3}{4}$.

$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nt}{2}$, där $a_n = 4 \frac{\cos(n/2) - (-1)^n}{n^2}$ då $n \neq 0$ och $a_0 = \frac{3}{2}$.

6.3c. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n t/3}$, där $c_n = \frac{2 - 3 \cos(n/3) + (-1)^n}{in}$ då $n \neq 0$ och $c_0 = 1$.

$x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nt}{3}$, där $b_n = 2 \frac{2 - 3 \cos(n/3) + (-1)^n}{n}$.

6.4 a. $-\frac{2i}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)t}$

b. Om $B > 1500$ Hz så kommer andelen förlorad energi att vara $< 0.3\%$ (om $B < 1500$ Hz så kommer andelen att vara $> 1.4\%$).

6.5 a. $x(0) = \frac{e^{4-2}}{\sinh}$, $x(4) = \frac{e^{(4-2)}}{\sinh}$, $x(\infty) = \frac{e}{2 \sinh} + \frac{e^{-}}{\sinh} = \coth$

b. \coth .

Obs att $x(\infty) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+in}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + i \cdot 0$, eftersom termerna i den senare summan tar ut varandra parvis.

Anmärkning: Även Parsevals relation kan användas. Man har att

$$|\dot{x}(t)|^2 = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

där $|c_n|^2 = (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}^2 = \frac{\sqrt{1+n^2}}{1+n^2}^2 = \frac{1}{1+n^2}$

och $|\dot{x}(t)|^2 = \frac{2 e^{2t}}{\sinh^2} dt = \frac{2}{\sinh^2} \frac{e^2 - e^{-2}}{2} =$
 $= \frac{2}{\sinh^2} \frac{(e - e^{-})(e + e^{-})}{2} = \frac{2}{\sinh^2} \cdot 2 \cdot \sinh \cdot \cosh = 2^2 \coth$,

varav $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \coth$.

6.6a. $a_4 = 3, b_2 = 1$, övriga a - och b -koefficienter $= 0$,
 $c_2 = -\frac{j}{2}, c_{-2} = \frac{j}{2}, c_4 = c_{-4} = \frac{3}{2}$, övriga $c_n = 0$.

6.6b. $a_2 = 3, b_1 = 1$, övriga a - och b -koefficienter $= 0$,
 $c_1 = -\frac{j}{2}, c_{-1} = \frac{j}{2}, c_2 = c_{-2} = \frac{3}{2}$, övriga $c_n = 0$.
(Ledning: Använd Eulers formler och syntesekvationen.)

6.7a. $X(\omega) = 3 e^{-3i\omega} + \frac{1}{2} e^{-i\omega/6}$. *(Ledning: Förenkla först funktionen.)*

6.7b. $c_n = \frac{3}{4} (-i)^n + \frac{1}{8} e^{in/12} \cdot \left(\text{Obs att } c_n = \frac{1}{4} X \left(\frac{2-n}{4} \right) \right)$

6.8 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (t - 3n/2)$

(Ledning: Syntesekvationen ger $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(2n+1)t/3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2e^{2it/3} \cdot e^{in(2t/3)}$,

använd sedan identiteten $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{int/L} = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL)$ och att $y(t) = y(t - a)$.)

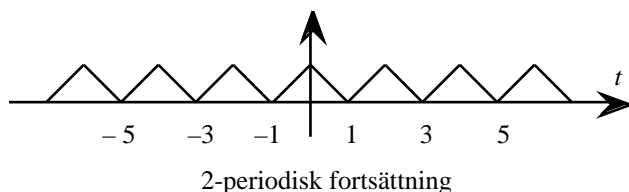
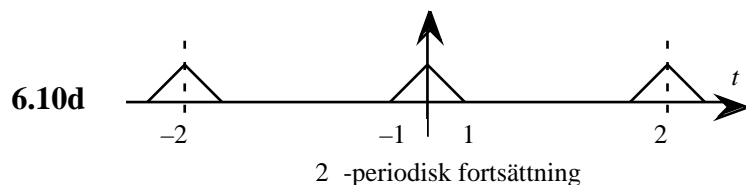
6.9a $c_n = (-1)^n \frac{e - e^{-}}{2(1 - in)}$

6.9b $a_n = (-1)^n \frac{e - e^{-}}{1+n^2}, b_n = (-1)^{n+1} \frac{e - e^{-}}{1+n^2} \frac{n}{1+n^2}$

6.10a $\frac{4}{3} (\sin - \cos)$, då $0, = \frac{4}{3}$, då $= 0$.

6.10b $c_n = \frac{2}{n^3} \sin n - \frac{2}{n^2} \cos n, (n \neq 0). c_0 = \frac{2}{3};$
 $a_n = \frac{4}{n^3} \sin n - \frac{4}{n^2} \cos n, (n \neq 1). a_0 = \frac{4}{3}; b_n = 0.$

6.10c $c_n = \frac{2}{2n^2} (-1)^{n+1}, (n \neq 0). c_0 = \frac{2}{3};$
 $a_n = \frac{4}{2n^2} (-1)^{n+1}, (n \neq 1). a_0 = \frac{4}{3}; b_n = 0.$



6.11a $x'(t) = 3y(t) - 2^3v(t), y'(t) = 2z(t), z'(t) = 1 - 2v(t).$

6.11b För $n \neq 0$: in $a_n = 3b_n - 2^3d_n$, in $b_n = 2c_n$, in $c_n = -2d_n$.

6.11c $2d_n = (-1)^n a_n = i \frac{(-1)^n}{n^3} (2n^2 - 6)$ för $n \neq 0$. $x(t)$ udda funktion $a_0 = 0$.

6.12a $c_n = (-1)^n \frac{a \sin a}{(a^2 - n^2)}$

6.12c Om $a = N$: $c_N = c_{-N} = \frac{1}{2}$, övriga $c_n = 0$.

(Obs att den 2-periodiska fortsättningen = $\cos Nt$)

- 7.1.** a. 2, b. e^t , c. e^{-t} , d. $2t$,
 e. 1, f. t , g. $t^2 + \frac{1}{12}$,
 h. $t + 1/2$, om $|t| > 1/2$,
 0, om $t < -1/2$,
 i. $1 - |t|$, om $|t| < 1$, 0 annars,
 j. t om $t > 0$,
 0, om $t < 0$, $= t \cdot u(t)$, k. $(e^{1/2} - e^{-1/2}) e^{-t}$,
 l. e^{2t} , m. e^{it} , n. $\cos t$, o. $\sin t$,
 p. $(t - 2)$.

7.4 $x(t) * \cos(\omega t) = i X(\omega) \cdot \sin(\omega t)$ och $x(t) * \sin(\omega t) = -i X(\omega) \cdot \cos(\omega t)$.

(Obs att $x(t)$ är udda och reellvärd (om och) endast om $X(\omega)$ är (udda och) imaginär, d.v.s. har realdel = 0.)

7.5. $1 - |f|$, om $|f| < 1$; 0 annars.

- 7.7** a. $\frac{1}{6} e^{-|t|} - \frac{1}{12} e^{-2|t|}$, b. $-\frac{1}{6} e^{-|t|} + \frac{1}{3} e^{-2|t|}$, c. $\frac{1}{6} e^{-2|t|} - \frac{1}{6} e^{-|t|} \operatorname{sign} t$,
 d. $\frac{1}{18} (e^{-3|t|} - 1) \operatorname{sign} t$, e. $(t) - \frac{3}{2} e^{-3|t|}$.

- 7.8** a. $\frac{e^{-i}}{2 + i}$, b. $\frac{4 e^{-i}}{4 + 2}$, c. $2 \cos$

d. $-2i \sin 2$, e. $\{e^{-i/4} (-2) + e^{i/4} (+2)\}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{(1 - i) (-2) + (1 + i) (+2)\}$$

(Ledning: $\sin(t + \pi/4) = -2i (e^{i/4} e^{it} - e^{-i/4} e^{-it})$.)

f. $\frac{a + i}{(a + i)^2 + b^2}$, (Ledning: Transformer t.ex $u(t) e^{-at}$ och $\cos bt$, enligt faltningsegenskapen är svaret $1/(2) \times$ faltningen av dessa transformer. Obs också att $x(t) * (t - a) = x(t - a)$.)

g. $-3i \frac{1}{9 + (-2)^2} - \frac{1}{9 + (+2)^2}$. (Ledning: Transformer $e^{-3|t|}$ och $\sin 2t$ var för sig, använd sedan faltningsegenskapen med faltningen på transformsidan.)

h. $\frac{1}{1 - a e^{-i T}}$. (Ledning: Transformer termvis. Man får en geometrisk serie som kan summeras.)

i. $\frac{(2 + i)^2 - 16}{((2 + i)^2 + 16)^2}$. (Ledning: Derivera på transformsidan.)

7.9 a. $1 + \cos(4t)$, b. $e^{2it} \operatorname{rect}(t/6)$. (Ledning: Givna transformen = $6 \operatorname{sinc}(3(-2)/)$.)

c. $\frac{1}{2} (e^{-i/3} (t - 4) + e^{i/3} (t + 4))$.

7.10 a. $Y_1(\omega) = 2 \cos \omega X(-\omega)$, b. $Y_2(\omega) = \frac{1}{2} e^{-4i} X(\omega/2)$, c. $Y_3(\omega) = -2 e^{-8i} X(\omega)$.

7.11 a. $y_1(t) = \frac{1}{2} e^{3it/2} \text{sinc}(t/(2)) = e^{3it/2} \frac{\sin t/2}{t}$. (Ledning: $Y_1(\omega) = \text{rect}(\omega - 3/2)$.)

b. $y_2(t) = ((t+3) - (t-3) + (t+1) - (t-1))/(4i)$. (Ledning: Använd t.ex. Eulers formler.)

c. $y_3(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{2 - e^{it}}$

7.12 a. $\frac{-4i}{(1 + \omega^2)^2}$, b. $-2i e^{-|\omega|}$.

7.13 $2 \sin(\omega/2) \cos \omega t$. (Obs att $\text{sinc} 1 = \text{sinc}(-1) = 0$ och att $\text{sinc}(\omega/2) = \text{sinc}(-\omega/2) = 2 \sin(\omega/2)$.)

7.14 $\frac{2}{t} \frac{\sin t}{t}$. (Obs att $G(\omega) = 2 \text{rect}(\omega/4)$. Ett mellanresultat: $2 x(t) \cos t = \frac{4}{t} \text{sinc}(2t)$.)

7.16 a. $X_L(\omega) = X(\omega) \cdot \text{rect}(\omega/(2L))$.

b. $X_L(\omega) = \frac{1}{1+i} \cdot \text{rect}(\omega/(2L))$.

$|X(\omega)|^2 d$

c. $1 - \frac{-L}{|\omega|} \text{respektive } 1 - \frac{2}{L} \arctan L = \frac{2}{L} \arctan \frac{1}{L}$.

$|X(\omega)|^2 d$

d. Använd t.ex. MacLaurinutvecklingen: $\arctan s = s + O(s^3)$. Sätt $s = \frac{1}{L}$ i denna.

e. $x_L(t) = x(t) * \frac{L}{t} \cdot \text{sinc} \frac{Lt}{t} = \frac{L}{t} \int_0^t e^{-\tau} \text{sinc} \frac{L(t-\tau)}{t} d\tau = \frac{L}{t} \int_0^t e^{-(t-\tau)} \text{sinc} \frac{L}{t} d\tau =$
 $= \frac{L}{t} \int_0^t e^{-\tau} e^{\tau} \text{sinc} \frac{L}{t} d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t e^{-\tau} \frac{e^{\tau} \sin L}{t} d\tau$

7.17 a. $-\sqrt{t} \cdot i \cdot e^{-t/4}$.

b. $\sqrt{t/2} \cdot e^{-t/8}$.

c. $e^{-t/2}$.

7.18 a. $\frac{1}{3} e^{-3|t-a|}$,

b. $\frac{1}{6} (e^{-6} + 1) \sin t$.

7.19 a. $\frac{2}{3} \frac{1}{16 + t^2}$.

b. Samma som a.

c. $\frac{7}{36} \frac{1}{49 + t^2}$.

- 7.20**
- a. $\frac{2}{a^2 - b^2} (a e^{-b|t|} - b e^{-a|t|}),$
 - b. $\frac{1}{a} (1 + |t|) e^{-a|t|},$
 - c. $\frac{4ab}{(a^2 + 4)(b^2 + 4)} \sin 2t.$ (Även då $a = b.$)

9. Liten formelsamling

1. Speciella funktioner

Språngfunktionen (Heavisides funktion)	$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$
Signumfunktionen	$\text{sign } t = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$
Rektangelfunktionen	$\text{rect } t = \begin{cases} 1, & \text{om } t < 1/2, \\ 0, & \text{om } t > 1/2. \end{cases}$
Sinus cardinalis ("Sincen") -funktionen:	$\text{sinc } t = \begin{cases} (\sin t)/t, & \text{om } t \neq 0, \\ 1, & \text{om } t = 0. \end{cases}$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t < 0, \\ \text{odefinierad,} & \text{om } t = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t-a) dt = 1 \text{ för alla konstanta } a.$$

Om $x(t)$ är kontinuerlig för $t = a$:

$$x(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (t-a) dt = x(a) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (t-a) dt,$$

Skalning:

$$x(at) = \frac{1}{|a|} x(t), \text{ om } a \neq 0.$$

2. Generaliserad derivering

Om $x(t)$ är en sträckvis deriverbar funktion med språngdiskontinuiteter d_1, d_2, \dots i punkterna a_1, a_2, \dots , dvs. $d_i = x(a_i+) - x(a_i-)$, så är

$$x'(t) = \{x'(t)\} + d_1 \delta(t-a_1) + d_2 \delta(t-a_2) + \dots$$

($x'(t)$ är den generaliserade derivatan, $\{x'(t)\}$ den klassiska).

Speciellt:

$$u'(t) = \delta(t), \quad \frac{d}{dt} \text{sign}(t) = 2\delta(t), \quad \frac{d}{dt} \text{rect}(t) = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2).$$

Derivering av δ -pulser:

$$\text{Om } x'(t) \text{ kontinuerlig i } t = a: \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t-a) dt = -x'(a)$$

$$\text{Om } x^{(n)}(t) \text{ kontinuerlig i } t = a: \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta^{(n)}(t-a) dt = (-1)^n x^{(n)}(a)$$

3. Periodicitet

P -periodicitet, ($P > 0$):

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodisk} \quad x(t+P) = x(t) \text{ för alla } t.$$

P -periodisk fortsättning:

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodiska fortsättningen av } y(t) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-nP).$$

4. Faltning

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} x(t) * (a y(t)) &= a (x(t) * y(t)), & x(t) * (y(t) + z(t)) &= x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \\ x(t) * y(t) &= y(t) * x(t), & (x(t) * y(t)) * z(t) &= x(t) * (y(t) * z(t)) \\ x(t) * (t - a) &= x(t - a), & x(t) * (t^n) &= x^{(n)}(t) \end{aligned}$$

5. Komplex fouriersserieutveckling av P-periodiska funktioner:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt/P}, \text{ (Syntesekvationen)}$$

$$\text{där } c_n = \frac{1}{P} \int_P x(\tau) e^{-jn\tau/P} d\tau. \text{ (Analysekvationen)}$$

Samband med reell serieutveckling för reella x(t)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nt/P + b_n \sin 2\pi nt/P), \\ c_n &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \text{ om } n \geq 1 \text{ och } = \frac{1}{2} (a_{-n} + jb_{-n}) \text{ om } n \leq -1 \text{ samt } = \frac{a_0}{2} \text{ om } n = 0, \\ a_n &= 2 \operatorname{Re} c_n, \text{ då } n \geq 0, \text{ och } b_n = -2 \operatorname{Im} c_n, \text{ då } n \geq 1. \end{aligned}$$

Funktionsnorm $\|x(t)\| = \sqrt{\frac{1}{P} \int_P |x(t)|^2 dt}$

Totalenergi (under 1 period): $\int_P |x(t)|^2 dt$

Medeleffekt $\frac{1}{P} \int_P |x(t)|^2 dt$

Parsevals relation $\frac{1}{P} \int_P |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

Enhetspulståg

$$\delta(t - nP) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt/P}$$

6. Fouriertransformen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \text{ (Syntesekvationen)}$$

$$\text{där } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \text{ (Analysekvationen)}$$

Funktionsnorm $\|x(t)\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ $^{1/2}$

Totalenergi $\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

Parsevals relation $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

Samband mellan fourierserier och -transformer

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt/P} \quad c_n = \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} x(t) e^{-jn t/P} dt$$

Fouriertransformer i tabellform

Allmänna egenskaper:

Speciella transformer

$$= 2 f$$

Funktion	Transform
Om $x(t)$	$Z(\omega)$
så $Z(\omega)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
$x(at), a > 0$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(\omega)$
$t x(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(j\omega)^n X(\omega)$
$t^n x(t)$	$j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$
Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2\pi n/T)$
L -periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2\pi n/L)$ med sampelavstånd $2\pi/L$

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$2\pi \delta(\omega)$
$(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$(t - t_0) + (t + t_0)$	$e^{-j\omega t_0} + e^{j\omega t_0} = 2 \cos(\omega t_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$(t - t_0) - (t + t_0)$	$e^{-j\omega t_0} - e^{j\omega t_0} = -2j \sin(\omega t_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$
$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\text{rect}(t/P)$	$P \text{sinc}(P\omega/(2\pi))$
$\text{sinc}(t/(2\pi))$	$\frac{1}{2\pi} \text{rect}(\omega)$
$\text{sinc}(t)$	$\text{rect}(\omega/(2\pi))$

Funktioner med rationella transformeringar

Konstanten a förutsätts vara > 0

$$= 2 f$$

Funktion	Transform
$(t^n)u(t)$	$\frac{n!}{(s-i)^{n+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$e^{-iat} \operatorname{sign} t$	$-\frac{2i}{s^2+a^2}$
$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$i^n \frac{t^{n-1} e^{-iat}}{(n-1)!} \operatorname{sign} t$	$\frac{2}{(s-i)^n}$
$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s-i}$
$e^{iat} \operatorname{sign} t$	$\frac{2i}{s^2-a^2}$
$\frac{(-t)^{n-1} e^{at}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{(s-i)^n}$
$\frac{t^{n-1} e^{iat}}{i^n(n-1)!} \operatorname{sign} t$	$\frac{2}{(s+i)^n}$
$\operatorname{sign} t$	$\frac{2}{i}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sign} t$	$\frac{2}{(i)^n}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+s^2}$
$e^{-a t } \operatorname{sign} t$	$-\frac{2i}{a^2+s^2}$
$\sin at \operatorname{sign} t$	$\frac{2a}{a^2-s^2}$
$\cos at \operatorname{sign} t$	$\frac{2i}{a^2-s^2}$

LTI-system



Definierande egenskaper:

1° (Linjaritet)

Om en insignal $z(t)$ är en linjär kombination av två insignaler $x(t)$ och $y(t)$,

$$z(t) = ax(t) + by(t), \quad a \text{ och } b \text{ konstanter,}$$

så är utsignalen $z_L(t)$ samma linjära kombination av $x_L(t)$ och $y_L(t)$:

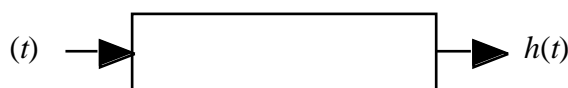
$$z_L(t) = ax_L(t) + by_L(t)$$

2° (Tidsinvarians)

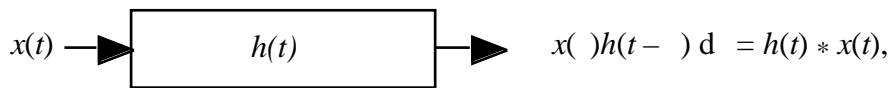
Om insignalen förskjuts i tiden, dvs. om $x(t)$ ersätts med $x(t - \tau)$, där τ är en reell konstant,⁴⁴ så kommer också utsignalen att förskjutas lika mycket i tiden:

$$y(t) = x(t - \tau) \quad y_L(t) = x_L(t - \tau)$$

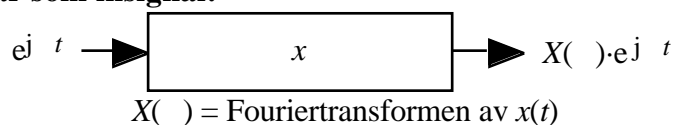
Pulssvar:



Utsignal/faltning:

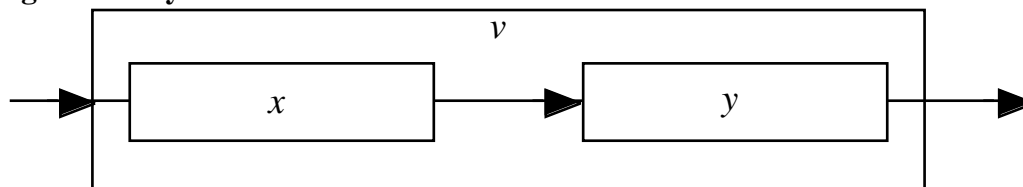


Harmoniska svängningar som insignal:



$$X(\omega) = \text{Fouriertransformen av } x(t)$$

Seriekoppling av LTI-system:



$$v(t) = x(t) * y(t)$$

$$V(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

och för fouriertransformerna:

⁴⁴ $x(t - \tau)$ är samma signal som $x(t)$ fast avsänd τ tidsenheter senare (om $\tau > 0$).

Register

Aliaseffekten	75	Hertz, Hz	38
amplitud	15	Impuls	26
analysekvation	4; 46; 54; 58	Jämn funktion	18
associativ lag för faltning	60	jämna delen	21
-puls	27; 63	Kommutativ lag för faltning	59
deltafunktionen	26	komplex	
deltapuls	27	fourierserietveckling	3
derivering	66	LTI-system	12; 29; 58
generaliserad	31	sammansättning	60
DFT	76	Medeleffekt	7
distribution	26	Norm	6; 9
Dirac	27	Operator	12; 55
-funktion	27	Parsevals relation	8; 10; 48; 71
-puls	27	periodisk	
diskreta fouriertransformen	76	fortsättning	23; 42; 69
distributiv lag för faltning	59	funktion	22
Effektivvärde	6	Poissons summationsformel	41
egenfunktion	14; 58	pulssvar	13; 30; 58
energi	7; 10; 48	pulståg	40; 41; 42; 64
enhetspulståg	40	Rationella funktioner	67
enhetsprånget	20	rect	21; 65
Eulers formler	2	rektangelfunktion	11; 20
Faltning	13; 29; 42; 59; 66	Sammansättning av	
fasläge	15	LTI-system	60
Fast Fourier Transform	76	sampelavstånd	41
fasvinkeln	15	sampling	41; 69; 72
FFT	76	serie	
filter	6; 50	geometrisk	38
fourierintegraler	4	sgn	20
fouriertransformen	4; 13; 54	sign	20; 65
diskreta	76	signal,	
dualitet	61	tidsdiskret	25
tidsdiskreta	75	tidskontinuerlig	25
fourierserietransformen	47	signumfunktionen	20; 65
frekvens	15	sinc	57; 65
frekvensrevertering	64	singularitet	27
frekvensupplösning	74	sinus cardinalis	57
fundamentalperiod	22	skalning,	19; 64
funktion,		areabevarande	19
generaliserad	26; 27	skalärprodukt,	
harmonisk	1; 38	för funktioner	9
jämn	18	komplex	8
periodisk	22	spegling	18
rationell	67	spektrum	2; 4
udda	19	stegfunktionen	20; 65
funktionsnorm	6	svängning,	
Generaliserad		harmonisk	1
derivering	31	syntesekvation	4; 46; 54; 58
funktion	26; 27	TDFT	75
geometrisk serie	38	tidsdiskret signal	25
Gibbs fenomen	49	tidsdiskreta	
Harmonisk funktion	1; 38	fouriertransformen	75
harmonisk svängning	1; 63		
Heavisides funktion	20; 65		

tidsinvarians	12
tidskontinuerlig signal	25
tidsrevertering	64
transform,	
fourier-	4; 13; 54
fourierserie-	46
translation	18; 63
trunkering	20; 72
Udda	
delen	21
funktion	19
unit-step-function	20
Variabelval	38; 54
vinkelmått,	
radianer	38
varv	38
vridning	19
Överföringsfunktion	14