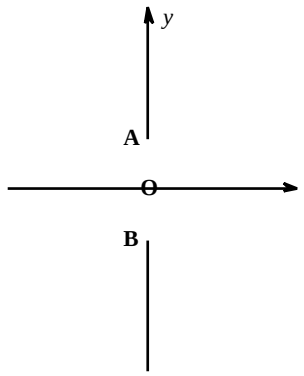
Fourieroptikdemo

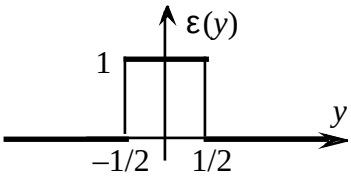
1. Introduktion

Om ett laserstrålknippe sänds genom en öppning, sprids ljuset på ett för öppningens (objektets) geometriska utseende karakteristiskt sätt. Ett lämpligt sätt att beskriva denna geometri är att för varje punkt i öppningen ange genomsläppligheten (transmittansen).



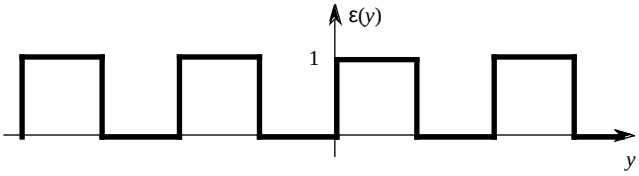
Exempelvis: För en öppning med vidden 1 som **AB** i figuren här bredvid, där kanterna **A** och **B** ligger på avståndet 1/2 från den optiska axeln **O**, beskrivs transmittansen av funktionen

$$\varepsilon(y) = \begin{cases} 1, & \text{om } |y| < 1/2, \\ 0, & \text{för övriga } y\text{-värden.} \end{cases} = \mathrm{rect}_1(y).$$



ε-värdet 1 svarar då mot full genomsläpplighet och 0 mot ingen genomsläpplighet alls.

En transmittans som den i figuren nedan:



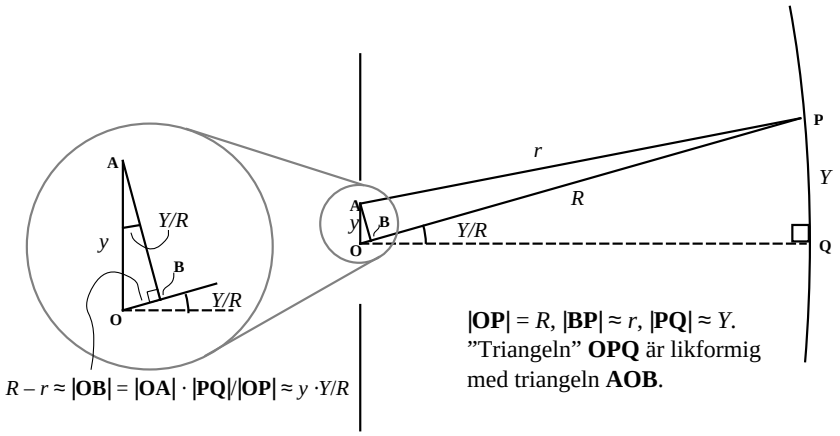
beskriver (en endimensionell variant av) ett gitter.

Det visar sig att om den spridda strålen uppfångas på en skärm på stort avstånd ifrån öppningen, så kommer det elektriska fältet där att vara proportionellt mot fouriertransformen av transmittansen. Fenomenet kallas *Fraunhofer-diffraktion*.

Detta kan förstås av följande överläggning, där vi utgår ifrån att det elektiska fältet E på avståndet r från en punktkälla är

$$E = \frac{\varepsilon}{r}\, e^{j(\omega t - kr)},$$

där ε är ett mått på källans styrka, ω och k konstanter som beror på strålens våglängd och hastighet samt t en tidsvariabel:



För R >> öppningsdiametern gäller att det elektriska fältet i **P** (med koordinat Y på skärmen) från punkten **A** (med koordinat y i öppningen) ges av

$$E(y) = \frac{\varepsilon(y)}{r}\, e^{j(\omega t - kr)} \approx \frac{\varepsilon(y)}{R - yY/R}\, e^{j\omega t}\, e^{-jk(R - yY/R)}$$

$$= \frac{\varepsilon(y)}{R - yY/R}\, e^{j(\omega t - kR)}\, e^{jkyY/R}.$$

Men för nämnaren i den första faktorn är $R - yY/R \approx R$, med mycket god approximation, varför

$$E(y) = e^{j(\omega t - kR)} \left(\frac{\varepsilon(y)}{R}\, e^{jykY/R}\right).$$

Observera att den första faktorn har beloppet 1 och inte beror på y utan bara av ljusets våglängd, fas och hastighet samt av avståndet till skärmen.

Det totala elektriska fältet i **P** är summan av bidragen från de enstaka punkterna i öppningen (*Huygens princip*), d.v.s.

$$E_{\mathbf{P}} = e^{j(\omega t - kR)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(y)}{R}\, e^{jykY/R}\, dy.$$

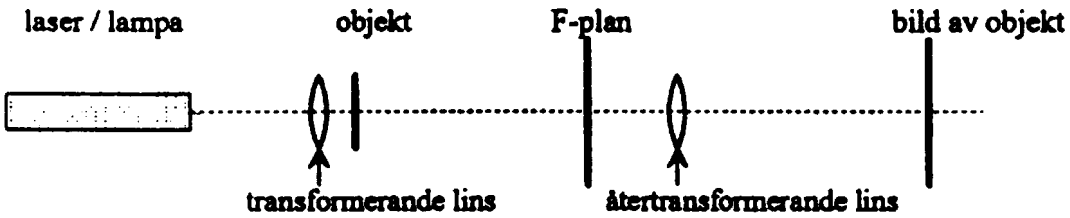
Men integralen i detta uttryck kan skrivas

$$E\left(\frac{-k}{2\pi R}\, Y\right), \text{ där } E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(y)}{R}\, e^{-2\pi jyf}\, dy \text{ är fouriertransformen av } \frac{\varepsilon(y)}{R}.$$

Det elektriska fältet på stort avstånd är alltså proportionellt mot fouriertransformen av transmittansfunktionen.

(Lägg märke till att variabeln före transform i det här fallet har rums- och inte tidsdimension.)

Detta kan realiseras med en apparatur enligt skissen:

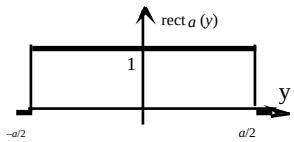


Genom att med en lins bryta ihop strålgången kan den ”oändligt” långt bort belägna skärmen flyttas till mera behagligt avstånd (F-planet i figuren). För strålgången till höger därom spelar detta plan objektets roll. Det innebär att dess spridningsbild långt borta motsvaras av fouriertransformen av fouriertransformen, vilket (så när som på orienteringen) återger orginalfunktionen, d.v.s. transmittansen. Genom att samla ihop det strålknippet med ytterligare en lins kan alltså en bild av öppningen återskapas.

Några fall som kan illustreras:

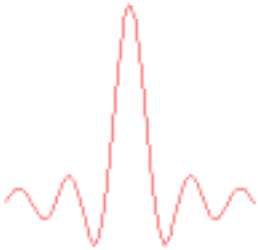
1. *”Enkelt” hål*. Öppning med transmittans

$$\varepsilon_1(y) = \mathrm{rect}_a(y) = \begin{cases} 1, & \text{om } |y| < a/2, \\ 0, & \text{för övriga } y\text{-värden.} \end{cases}$$

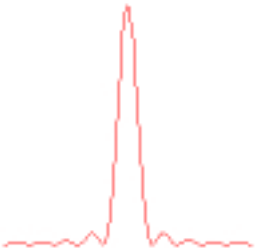


Dess fouriertransform är

$$E_1(f) = a \operatorname{sinc}(af)$$



Elektriska fältet

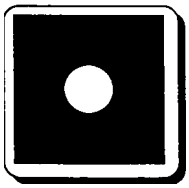


Intensiteten

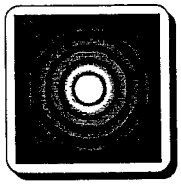
Det ögat registrerar är dock inte det elektiska fältet utan dess intensitet, d.v.s. $|E_1(f)|^2$

En 2-dimensionell motsvarighet till detta är ett cirkulärt hål:

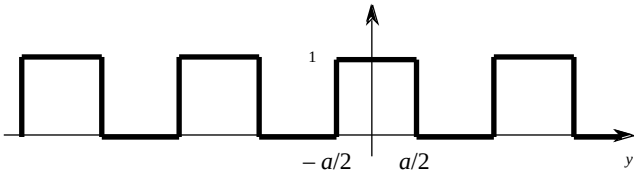
Hålet



och dess transform:



2. *Gitter*: Graf för transmittansen:



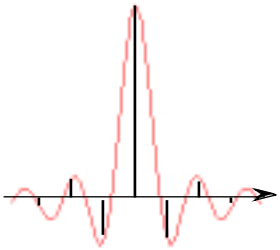
Idealt är transmittansfunktionen då $2a$-periodisk och ges analytiskt av:

$$\varepsilon_2(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_1(y - 2ka) = \varepsilon_1(y) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(y - 2ka),$$

Eftersom transformen av pulståget $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(y - 2ka)$ är pulståget $\frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{2a}\right)$, så har man enligt faltningssatsen:

$$E_2(f) = E_1(f) \cdot \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{2a}\right)$$

Detta innebär att $E_2(f)$ (så när som på skalfaktorn $1/2a$) erhålls genom att $E_1(f)$ samplas i punkterna $\frac{k}{2a}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Elektriska fältet

Man ser här koefficienterna för fourierserieutvecklingen av den periodiska funktionen $\varepsilon_2(y)$

Ett verkliga gitter skiljer sig dock från de ideala bland annat genom att de inte har oändlig utbredning – utanför ett i förhållande till gitterperioden $2a$ rätt långt intervall, $-b/2 < y < b/2$, så är transmittansen $= 0$. Detta kan beskrivas med en transmittansfunktion

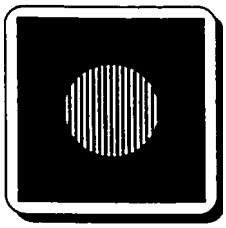
$$\varepsilon_3(y) = \varepsilon_2(y) \cdot \operatorname{rect}_b(y),$$

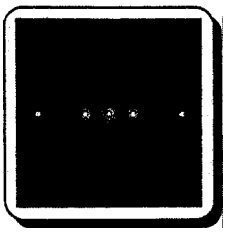
där alltså $\operatorname{rect}_b(y) = 1$ om $-b/2 < y < b/2$ och annars $= 0$. Transformeras detta får men enligt den duala varianten av faltningssatsen att

$$E_3(f) = E_2(f) * b \operatorname{sinc}(bf), \text{ där } b >> a.$$

Eftersom grafen för b sinc (bf) har en mycket smal huvudlob, så erhålls en god approximation till gra–fen för $E_3(f)$ ur $E_2(f)$:s genom att ”pikarna” ersätts med mera utbredda sinc-liknande pulser – man får på skärmen en rad av diffusa punkter vars intensitet avklingar snabbt åt sidorna:

Gitter och dess transform



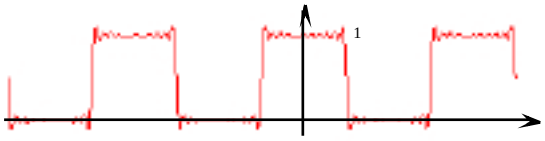


3. *Återtransformering. Filtrering*

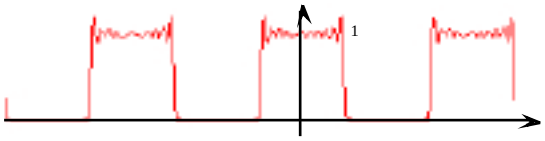
I det ideala fallet, då man har ett fourierplan med oändlig utbredning, skulle den andra linsen i apparaturen producera en kopia av orginalet. Ett sådant plan kan förstås aldrig realiseras utan det blir i realiteten mer eller mindre beskuret. Planets begränsning fungerar som ett slags lågpassfilter. Effekten av detta kan utredas med fourieranalys:

Om fourierplanet beskärs symmetriskt kring den optiska axeln så får man en situation liknande den i de första figurerna ovan på sidan 1. Om öppningens diameter är b, orginalobjektets transmittans $\varepsilon(y)$ och dess fouriertransform $E(f)$, så kommer $E(f) \cdot \mathrm{rect}_b(y)$ att vara den beskurna transformen. Men $\mathrm{rect}_b(y)$ är transform av b sinc by, d.v.s. den beskurna transformen motsvarar en transmittans $\varepsilon_{\mathrm{blurrad}}(y)$ som ges av faltningen $\varepsilon(y) * (b \text{ sinc } by)$.[1] Eftersom konstanten b är rätt stor i förhållande till övriga detaljer i fourierbilden, så kommer huvudloben i sinc-funktionen att vara förhållandevis smal. Transmittansen $\varepsilon_{\mathrm{blurrad}}(y)$ visar en något suddigare bild av orginalet.

Återtransformering av en så beskuren transformation, $E_3(f)$ i gitterfallet under punkt 2, ger då ett fält[2] och intensitet (= synlig bild) av slagen



Elektriskt fält



Intensitet

---

1 Faltning av två funktioner $u(t)$ och $v(t)$ kan (bortsett från en skalfaktor) beskrivas som att man ersätter funktionen $u(t)$ med ett vägt medelvärde, där (för alla t) $u(\tau)$ vägs ihop med $v(t-\tau)$. Om $v(t)$ väsentligen $\neq 0$ bara om $t \approx 0$, så kommer faltningens värde i punkten t bara att bero på u:s värden i t:s omedelbara omgivning.

2 Tänker man i fourierserier så motsvaras beskärningen av att den oändliga serien ersätts med en ändlig partialsumma.