Inlämningsuppgifter, nr 1

Uppgifterna lämnas in senast vid lektionen den 7 december. Du bör åtminstone räkna c:a 75% av dessa uppgifter.

1.[1] Visa utifrån Peanos axiom att
varje tal n **N**, $n \neq 0$, har en ”närmaste föregångare”, dvs $n = m^+$ för något m **N.**

2. Visa utifrån Peanos axiom och definitionen av addition
a. att $0 + n = n$ för alla n **N**
b. att $n + m^+ = n^+ + m$ för alla n och m **N**

3. Visa utifrån Peanos axiom och definitionen av multiplikation
a. att $n \cdot 0^+ = n$, för alla n **N**,
b. och med hjälp av kommutativa och associativa lagarna för addition att

$$(n + m) \cdot p = (n \cdot p) + (m \cdot p)$$

4. Visa utgående från Peanos axiom, definitionerna och räknelagarna för addition och multiplikation, samt definitionerna av subtraktion och division,
d. $n - (m + p) = (n - m) - p$
e. $\frac{0}{n} = 0$ för alla n **N**, $n \neq 0$ och $\frac{m}{0^+} = m$ för alla m **N**.

5. Om α och β Z. Visa utgående från räknelagarna för **Z** (**Z1-9**) att
a. Om $\alpha = [(n, m)]$ n, m **N**, så är $-\alpha = [(m, n)]$.
b. $(-1)\cdot\alpha = -\alpha$

Rosenlicht: Kap 1, sid 12, 7b, d och 9.

F1. Vilka är funktionerna av typ $\{1,2,3\} \rightarrow \{0,1\}$

F8. Verifiera att f: **X** → **Y** är en injektion om och bara om $f \circ g = f \circ h$ $g = h$.
Och att f: **X** → **Y** är en surjektion om och bara om $g \circ f = h \circ f$ $g = h$.
(Underförstått att f, g och h har valts så att de angivna sammansättningarna är meningsfulla.)

R2. Är relationen ”vara (hel)syskon till” symmetrisk? reflexiv? transitiv?
Hur blir det för relationerna ”vara barn till min mamma och pappa” resp. ”vara kusin till”?

G3. Varför är (**Q**,·) inte någon grupp?

G6. Låt **M** vara mängden som består av de båda talen ±1. Om man som räknesätt tar ”multiplikation”, är (**M**,) då en grupp?

G7. Verifiera att (**M**, o) är en grupp om **M** är mängden av bijektioner **X** → **X** och o är sammansättningsoperationen. Är gruppen abelsk?

G8. Låt **X** i föregående uppgift vara mängden {0, 1}. Vilka är bijektionerna? Skriv upp gruppens ”multiplikationstabell”. Är gruppen abelsk?

G9. Låt **X** i stället vara mängden {0, 1, 2}. Vilka är bijektionerna? Skriv upp gruppens ”multiplikationstabell”. Är gruppen abelsk?

Ri2. Är (**N** + ; ·) en ring?

Ri3. Är ($\mathbf{Q}_+$ + ; ·) en ring? $\mathbf{Q}_+$ är mängden av de positiva rationella talen.

---

[1] Uppgiftsnumreringen är densamma som i det utdelade lektionsmaterialet.

K1. Verifiera att om $\mathbf{M} = \{a + b\sqrt{2},\ a$ och $b \quad \mathbf{Q}\}$, så är $(\mathbf{M}, +, \cdot)$ en kropp.

K3. Utgör restklasserna mod 3, resp mod 4 med räknesätten addition och multiplikation kroppar?

K4 För vilka heltal $n \geq 2$ utgör restklasserna mod n med räknesätten addition och multiplikation en kropp?

AEE Övn 5.1

Rosenlicht: Kap 2. 6 , 7, 10b, c, 14, 15.

L1. Skriv upp definitioner för + och $\lambda\cdot$, så att $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum. (n står för något heltal ≥ 2.)

L4. Låt $\mathbf{L}$ vara mängden av alla funktioner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ med

addition $(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ och

multiplikation med skalär: $(\lambda\cdot f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\cdot f(x)$.

Verifiera att $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum.

L5. Låt $\mathbf{P}$ vara mängden av alla polynom $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Verifiera att $(\mathbf{P}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är ett linjärt rum om + och $\cdot$ definieras som i exempel 5 ovan.

L6. Samma som föregående uppgift fast med följande delmängder av $\mathbf{P}$

a. {polynomen av grad $\leq n$}, där n något naturligt tal.
b. {polynomen av grad $= n$}, där n något naturligt tal.
c. {alla polynom p för vilka $p(\pi) = 0$}
d. {alla polynom p för vilka $p(0) = \pi$}
e. {alla polynom p för vilka $p'(2) = 0$, där p' är p:s derivata

Man säger att en vektor $\boldsymbol{a}$ är en *linjär kombination* av vektorerna $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ om

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{b}_k .$$

Vidare: En mängd $\mathbf{M}$ av vektorer sägs vara *linjärt oberoende* om ingen av vektorerna är en linjär kombination av de övriga i $\mathbf{M}$. Det maximala antalet linjärt oberoende vektorer i $\mathbf{L}$ kallas rummets *dimension*. (Om denna inte är ett naturligt tal så säger vi att dimensionen är oändlig.)

L8. Verifiera att alla vektorer i ett rum av dimension 1 kan skrivas på formen $\lambda\cdot\boldsymbol{e}$ där $\boldsymbol{e}$ är en på förhand vald vektor $\neq \mathbf{0}$.

L10 (Ett underligt(?) vektorrum)

Låt $\mathbf{R}_+$ = de positiva reella talen och definiera två räknesätt och :

$a \quad b = ab$ (där a och $b \quad \mathbf{R}_+$),

$\lambda \quad a = a^\lambda$ (där $\lambda \quad \mathbf{R}$ och $a \quad \mathbf{R}_+$)

Verifiera att $(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}, \quad , \quad)$ är ett linjärt rum och att dess dimension = 1.

Två linjära rum $(\mathbf{L}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ och $(\mathbf{M}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ är *isomorfa* ("i allt väsentligt lika") om det finns en bijektion $\phi : \mathbf{L} \to \mathbf{M}$ sådan att

I. $\phi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \phi(\boldsymbol{a}) + \phi(\boldsymbol{b})$ och
II. $\phi(\lambda\cdot\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot\phi(\boldsymbol{a})$.

L11. Visa att alla vektorer i ett linjärt rum av dimension 1 är isomorfa. Ange någon isomorfi Det linjära rummet mellan $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ och det linjära rummet $(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}, \quad , \quad)$ i uppg L10.