B

Inlämningsuppgifter, nr 2

Uppgifterna lämnas in senast vid lektionen den 16 februari. Du bör åtminstone räkna c:a 75% av dessa uppgifter.

Rosenlicht :

Ch 3 (sid 61ff): 4, 6, 8, 13, 16, 26, 32.

Ch 4 (sid 90ff): 1, 9b,c, 10c,17, 27, 32, 33.

Några exempel på metriska rum:

Ex 8.1. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^n$ och $d(\boldsymbol{x}, \mathbf{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, där $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2}$.
(Den så kallade *euklidiska* metriken.)

Ex 8.2. Varje delmängd av ett metriskt rum med samma metrik som rummets.

Ex 8.3. $\mathbf{E}$ en godtycklig mängd och $d(p, q) = 1$ om $p \neq q$ och annars = 0.
(Den så kallade *diskreta* metriken)

Ex 8.4. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$ och $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Ex 8.5. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$ och $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max(|x_1 - y_1| , |x_2 - y_2|)$.

L8.1 Verifiera att om

$$\mathbf{M}_1 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2 ; x \geq 0 \;\; y > 0\}$$

så utgörs de inre punkterna av:

$$\mathbf{M}_2 = \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2 ; x > 0 \;\; y > 0\}$$

och randpunkterna av de icke-negativa halvaxlarna:

$$\mathbf{M}_3 = \{(x,0) \quad \mathbf{R}^2; x \geq 0 \} \qquad \{(0,y) \quad \mathbf{R}^2; y \geq 0\}$$

Rita figur!

L8.2 Verifiera att för mängderna i övning 8.1 ovan är

$\mathbf{M}_2$ öppen

$\mathbf{M}_3$ sluten och

$\mathbf{M}_1$ varken öppen eller sluten!

En *norm* i ett linjärt rum $\mathbf{E}$ är en funktion $|\cdot|$ av typen $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$, som uppfyller

N1. $|\boldsymbol{x}| > 0$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ och = 0 för $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

N2. $|\lambda \boldsymbol{x}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{x}|$ för alla skalärer λ och alla vektorer $\boldsymbol{x}$,

N3. $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ för alla vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$.

L8.8 Verifiera att funktionerna $d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ i exemplen 8.1, 8.4 och 8.5 är normer på vektor-rummet $\mathbf{R}^2$.

L9.5 Låt f vara följande reellvärda funktion av två reella variabler:

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x}, & \text{då } x \neq 0, \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Vad gäller om gränsvärdena

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right) \text{ respektive } \lim_{(x,\ y) \to (0,\ 0)} f(x, y)?$$

L10.1 Låt **M** vara följande delmängd i planet $\mathbf{R}^2$:

$\{(x,y);\ y = \sin \frac{1}{x},\ \text{och } x > 0\} \quad \{(x,0);\ x \leq 0\}$.

Verifiera att den är sammanhängande men inte bågvis sammanhängande.

L10.2 Bevisa:

E är bågvis sammanhängande och f kontinuerlig $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$
E bågvis sammanhängande.

L11.1 Avgör vilka av följande funktioner som är likformigt kontinuerliga i de angivna intervallen:

a. $f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x,$ b. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x$,

c. $f(x) = \sin x. \quad x \quad \mathbf{R}$.

Ledningar: a. Visa t. ex. först att $\sqrt{x + \delta} - \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta}$ om x och $\delta \geq 0$.

b. Visa t. ex. först att för alla $\delta > 0$ gäller att $\ln(x + \delta) - \ln x \to \infty$ då $x \to 0+$.

c. Användbara trigonometriska samband:
$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ och $|\sin x| \leq |x|$.

L11.2 a. Verifiera, att om funktionen f är likformigt kontinuerlig på i mängden **M** så måste den också vara likformigt kontinuerlig på varje delmängd av **M**.
b. Verifiera, att om funktionen f är likformigt kontinuerlig i mängderna $\mathbf{M}_1$ och $\mathbf{M}_2$ så måste den också vara likformigt kontinuerlig mängden $\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2$.

L11.6 Visa att om $f(x)$ är en funktion av en reell variabel, likformigt kontinuerlig i ett *begränsat* (men inte nödvändigtvis slutet) intervall, så är också funktionen begränsad (dvs det finns en konstant K sådan att $|f(x)| \leq K$ för alla x i definitionsintervallet).

L11.7 Bestäm för var och en av följande funktioner $f(x)$ de a för vilka f är likformigt kontinuerlig i intervallet $a < x$:

a. $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ b. $f(x) = \frac{1}{1 + x}$ c. $f(x) = e^{-x}$

Ledningar: a. Använd t.ex. resultatet från uppgift 11.4 ovan
b. Undersök först likformigheten i intervallen $a \leq x \leq 0$ (för olika a) resp. $0 \leq x$

L11.8 Låt $f(x) = \sin(x^2)$, $-\infty < x < \infty$.
a. Bestäm samtliga nollställen.
b. Visa att det finns nollställen till f som ligger godtyckligt nära varandra.
c. Bestäm f:s kontinuitetsmodul och avgör om funktionen är likformigt kontinuerlig eller ej.

Övningarna 12.1, 2, 4 – 8 går ut på att, *utifrån principerna I – XI* i lbladet till lektion 12 visa, att de ”vanliga” elementära funktionerna är kontinuerliga.

L12.1 Motivera varför alla polynom

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

är kontinuerliga funktoner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

L12.2 Motivera varför alla rationella uttryck

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

är kontinuerliga funktioner.

L12.4 Bevisa att de trigonometriska funktionerna sin x, cos x, tan x och cot x är kontinuerliga.
(Definitionerna av uttrycken ifråga liksom ”elementära” trigonometriska samband, som additionssatser, produksatser m.m. får anses bekanta (= tidigare visade).)

L12.5 Bevisa att de cyklometriska funktionerna arcsin x, arccos x, arctan x och arccot x är kontinuerliga.

L12.6 Bevisa att funktionen a^x (a konstant > 0) är kontinuerlig. (Potenslagarna får anses vara bekanta och likaså att funktionen $t \to \frac{a^t - 1}{t}$ är växande för alla t **R**)

L12.7 Bevisa att $x \to \log_a x$, a en konstant > 0 och $\neq 1$, är en kontinuerlig funktion.

L12.8 Bevisa att $x \to x^\alpha$, där α är konstant och $x > 0$, är en kontinuerlig funktion.

L12.9 Låt $r(x)$ vara en rationell funktion som i uppg 12.2 ovan. Ange nödvändiga och tillräckliga villkor på nollställen och grad has polynomen i täljare och nämnare för att $r(x)$ skall vara likformigt kontinuerliga på *hela* **R**.