Lösningsskisser till tentamen 5B1304 020529

1. Den inhomogena ekvationen kan skrivas

$$y'' - \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}\, y' + \left(\frac{2}{\sin^2 x} - 1\right) y = \sin x.$$

En partikulärlösning erhålls om man i ansatsen $y = A(x)\sin x + B(x)\, x \sin x$ väljer $A(x)$ och $B(x)$ så att

$$\boldsymbol{W}\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix},$$

där $\boldsymbol{W}$ är Wronskimatrisen

$$\begin{pmatrix} \sin x & x \sin x \\ \cos x & \sin x + x\cos x \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin^2 x}\begin{pmatrix} \sin x + x\cos x & -x\sin x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix},$$

varav t. ex $A(x) = -x^2/2$ och $B(x) = x$. En partikulärlösning är alltså

$$y_p = -x^2/2 \cdot \sin x \;+\; x \cdot x \sin x = x^2/2 \cdot \sin x.$$

Eftersom den homogena ekvationens allmänna lösning är

$$y = C\sin x + D\, x \sin x$$

får man

Svar: $y = (x^2/2 + C + Dx)\sin x$, C och D godtyckliga konstanter.

2. Ekvationen kan skrivas

$$x^2 y'' + 2x^2 y' + (x^{1/2} + x^2) y = 0$$

och är av formen

$$x^2 y'' + x(a + 2bx^r)\, y' + [c + dx^{2s} - b(1 - a - r)x^r + b^2 x^{2r}]\, y = 0,$$

med $a = 0$, $b = 1$, $r = 1$, $c = 0$, $d = 1$, $s = 1/4$. Den är alltså en transformerad Besselekvation med allmän lösning.

$$y = x^{\frac{1-a}{2}}\, e^{-\frac{bx^r}{r}} \left(A\, J_p\!\left(\frac{\sqrt{d}}{s}\, x^s\right) + B\, Y_p\!\left(\frac{\sqrt{d}}{s}\, x^s\right)\right)$$

där

$$p = \frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - c} = 2.$$

Alltså

Svar: $y = \sqrt{x}\, e^{-x}\left(A\, J_2(4\sqrt[4]{x}) + B\, Y_2(4\sqrt[4]{x})\right)$ A och B godtyckliga konstanter.

3. *Variant 1*: (Användning av tabellverk)

Av tex. β framgår att den $2L$-periodiska, sträckvis konstanta funktionen som för $|x| < \alpha L$ är $= h$ och för $\alpha L < |x| < L$ är $= 0$, har fourierutvecklingen

$$\alpha h + \frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n} \cos(n\pi x/L).$$

Den givna funktionen, för vilken $L = 3$, är summan av två sådana sträckvis konstanta funktioner, den ena med $h = 1$ och $\alpha = 1/3$ och den andra med $h = 1$ och $\alpha = 2/3$. Man får

Svar: $1 + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi/3 + \sin 2n\pi/3}{n} \cos(n\pi x/3)$

Anmärkning: $\sin n\pi/3 + \sin 2n\pi/3 = 2\sin\dfrac{n\pi/3 + 2n\pi/2}{2}\cos\dfrac{n\pi/3 - 2n\pi/2}{2} =$

$= 2\sin n\pi/2 \cos n\pi/6 = 0$ om n har resten 0, 2, 3, eller 4 vid division med 6 och $= \sqrt{3}$ resp. $-\sqrt{3}$ allteftersom n harv resten 1 resp. 5 vid division med 6. Fourierserien kan därför också skivas

$$1 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{\cos(\pi x/3)}{1} - \frac{\cos(5\pi x/3)}{5} + \frac{\cos(7\pi x/3)}{7} - \frac{\cos(11\pi x/3)}{11}\ldots\right)$$

Variant 2: (Direkt beräkning)

Eftersom funktionen är jämn så är dess fourierserie av cosinustyp:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L), \text{ där } a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx.$$

I detta fall är $L = 3$ och man får för $n \geq 1$ att

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^1 2\cos(n\pi x/3)\,dx + \frac{2}{3}\int_1^2 \cos(n\pi x/3)\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{2\sin(n\pi x/3)}{n\pi/3}\right]_{x=0}^{1} + \frac{2}{3}\left[\frac{\sin(n\pi x/3)}{n\pi/3}\right]_{x=1}^{2} = \frac{2}{n\pi}(\sin n\pi/3 + \sin 2n\pi/3).$$

För $n = 0$ erhålls $a_0 = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^1 2\,dx + \dfrac{2}{3}\int_1^2 dx = 2.$

Svar som ovan.

4a. Ekvationen kan skrivas $y'' + 2y' + \lambda y = 0$, vilket är en linjär ekvation med konstanta koefficienter.

Dess karakteristiska ekvation är $D^2 + 2D + \lambda = 0$ med rötterna $D_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$.

Ekvationens allmänna lösning är därmed:

$$y = \begin{cases} A e^{D_1 x} + B e^{D_2 x}, & \text{om } \lambda < 1, \\ e^{-x}(A\cos\sqrt{\lambda - 1}\,x + B\sin\sqrt{\lambda - 1}\,x), & \text{om } \lambda > 1, \\ e^{-x}(A + Bx), & \text{om } \lambda = 1. \end{cases}$$

Kombinerat med randvillkoren $y(0) = y(\pi) = 0$ får man icketriviala lösningar om och endast om $\sqrt{\lambda - 1}$ = heltal > 0, dvs om och endast om $\lambda_n = 1 + n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ vilket alltså är problemets egenvärden. Egenfunktionerna utgörs av motsvarande icke-triviala lösningar:

$$y_n = B_n e^{-x} \sin nx.$$

Svar: Egenvärden $1 + n^2$, egenfunktioner $B_n e^{-x} \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

4b. Koefficienterna c_n i serien beräknas enligt

$$c_n = \frac{\langle f, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle},$$

där $\langle f,g\rangle$ är den till problemet hörande skalärprodukten. Dess viktsfunktion avläses som funktionen $p(x)$ då ekvationen är på formen

$$(r(x)y')' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0.$$

Den givna ekvationen är just på denna form, varför $p(x) = e^{2x}$ i det här fallet. Detta ger

$$<f,g> = \int_0^{\pi} f(x)\, g(x)\, e^{2x}\, dx, \quad <y_n,y_n> = \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin^2 nx\, e^{2x}\, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{\pi}{2}$$

och **Svar:** $c_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, e^{x}\, dx$.

5. Ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$, X och T ej nollfunktionerna, ger

$$X'(x)T(t) + 2xX(x)T'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{X'}{2xX} = -\frac{T'}{T} = \text{konstant } k.$$

Man får

$$\begin{cases} X'/X = 2kx, \\ T'/T = -k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln X = kx^2 + A, \\ \ln T = -kt + B, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Ce^{kx^2}, \\ T = D\, e^{-kt}. \end{cases}$$

Funktionerna $u(x,t) = Ce^{kx^2}e^{-kt} = Ce^{k(x^2-t)}$ satisfierar alltså den givna ekvationen. För dessa gäller att $u(0,t) = Ce^{-kt}$, vilket överensstämmer med det givna randvillkoret $u(0, t) = e^{-2t}$ om $C = 1$ och $k = 2$.

Svar. $u(x,t) = e^{2(x^2-t)}$.

6. Man har

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{(1 + x^2)(4 + x^2)}\, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{(1 + x^2)(4 + x^2)}\, dx,$$

där

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{(1 + x^2)(4 + x^2)}\, dx = \sum_{\substack{\text{Summerat över alla} \\ \text{singulariteter } \zeta \\ \text{i övre halvplanet.}}} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\zeta} \frac{e^{i\omega z}}{(1 + z^2)(4 + z^2)}$$

Integranden har singulariteter endast i nämnarens nollställen och dessa är ± i samt ± 2i, samtliga enkla eftersom faktorerna av nämnaren, $(z + i)(z - i)(z + 2i)(z - 2i)$ alla är enkla. Av nollställena ligger i och 2i i övre halvplanet och de båda andra i det undre. Integranden har alltså i övre halvplanet de enkla polerna i och 2i. Man får

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{(1 + x^2)(4 + x^2)}\, dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{i\omega z}}{(1 + z^2)(4 + z^2)} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{e^{i\omega z}}{(1 + z^2)(4 + z^2)}.$$

Men $\operatorname*{Res}_{z=\zeta} \dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{p(\zeta)}{q'(\zeta)}$ om $q(z)$ har ett enkelt nollställe för $z = \zeta$.

Tillämpas detta på $p(z) = e^{i\omega z}/(4 + z^2)$ och $q(z) = 1 + z^2$ i den första residuen och på $p(z) = e^{i\omega z}/(1 + z^2)$ och $q(z) = 4 + z^2$ i den andra får man:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{i\omega z}}{(1 + z^2)(4 + z^2)} = \left.\frac{e^{i\omega z}/(4 + z^2)}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-\omega}/(4 + (-1))}{2i} = \frac{1}{6i}\, e^{-\omega},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{e^{i\omega z}}{(4 + z^2)(1 + z^2)} = \left.\frac{e^{i\omega z}/(1 + z^2)}{2z}\right|_{z=2i} = \frac{e^{-2\omega}/(1 + (-4))}{4i} = -\frac{1}{12i}\, e^{-2\omega}:$$

Detta ger

Svar: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{(1 + x^2)(4 + x^2)}\, dx = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{3}\, e^{-\omega} - \frac{\pi}{6}\, e^{-2\omega}\right) = \frac{\pi}{3}\, e^{-\omega} - \frac{\pi}{6}\, e^{-2\omega}$.

7a. Enligt uppgiften är $\boldsymbol{F} = \dfrac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$.

Detta ger rot $\boldsymbol{F} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}, \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}, \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}\right)$

Förstakomponenten i denna vektor är

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} = -\frac{\alpha}{2} \frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2+1}} + \frac{\alpha}{2} \frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2+1}} = 0.$$

Bokstavsbyte $x \to y \to z \to x$ i dessa räkningar ger att de båda andra komponenterna också är = 0. V.S.B.

7b. Potentialfunktioner är de funktioner $U(x,y,z)$ som uppfyller villkoret grad $U = \boldsymbol{F}$, dvs.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}, \qquad [1]$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}, \qquad [2]$$

och

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}. \qquad [3]$$

Integreras [1] med avseende på x får man för $\alpha \neq 2$:

$$U = \frac{1}{2-\alpha} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2-1}} + C(y,z) = \frac{1}{2-\alpha} r^{2-\alpha} + C(y,z),$$

där C i varje fall är oberoende av x. För $\alpha = 2$ får man i stället den primitiva funktionen

$$U = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2 + z^2) + C(y,z) = \ln r + C(y,z).$$

Sättes detta in i [2] 0ch [3] får man villkoren $\dfrac{\partial C}{\partial y} = \dfrac{\partial C}{\partial z} = 0$, dvs C är oberoende också av y och z och alltså konstant.

Svar: Potentialfunktioner är $\dfrac{1}{2-\alpha} r^{2-\alpha} + C$ om $\alpha \neq 2$ och $\ln r + C$ om $\alpha = 2$.