Lösningskisser, Signaler&system I, 5B1209, 030825

1. a. Ekvationens vänsterled kan skrivas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1-x^2)\cdot y),$$

varför man efter integration för det ekvivalenta sambandet

$$(1-x^2)\cdot y = x^2 + C$$

Begynnelsevärdet $y(0)=2$ är uppfyllt om $(1-0)\cdot 2 = 0+C$, d.v.s. då $C=2$. Detta ger lösningen $y = \dfrac{x^2+2}{1-x^2}$ som har $x=\pm 1$ som enda singulära punkter. Det största intervall innehållande 0 i vilket lösningen är definierad är därför $-1<x<1$

Svar: $y = \dfrac{x^2+2}{1-x^2}, -1<x<1.$

Anmärkning: Om man inte hittar ovannämnda omskrivning av vänster led direkt, så kan man komma fram till den genom att använda integrerande-faktor-metoden för linjära ekvationer och av 1:a ordningen:
Efter division med koefficienten $1-x^2$ för derivattermen får ekvationen formen

$$y' - \frac{2x}{1-x^2}y = \frac{2x}{1-x^2}, \tag{$*$}$$

där man avläser en integrerande faktor:

$$\mathrm{e}^{\int -2x/(1-x^2)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\ln(1-x^2)+C} = \lceil \text{för } C=0 \rceil = 1-x^2.$$

Men detta innebär att VL i ekvationen $(*)$ efter multiplikation med $(1-x^2)$ kan skrivas just $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1-x^2)\cdot y)$.

b. Den allmänna lösningen till [ekv1] är enligt ovan

$$y = \frac{x^2+C}{1-x^2}$$

vilken är väldefinierad i varje fall för $x\neq\pm 1$. För $C\neq -1$ saknar y reellt gränsvärde då $x\to\pm 1$, eftersom täljaren $\to 1+C\neq 0$ medan nämnaren $\to 0$. Lösningarna är alltså inte definierade för dessa x-värden. För $C=-1$ får man däremot lösningen $y = \dfrac{x^2-1}{1-x^2} = -1$, som ju är definierad för alla x.

Svar: $y=-1, -\infty<x<\infty.$

2. a. Man har att p_i ortogonal mot $p_k \Leftrightarrow (p_i,p_k)=0$. I detta fall är

$$(p_0,p_1) = \int_{-1}^{1} 1\cdot x\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$(p_0,p_2) = \int_{-1}^{1} 1\cdot(3x^2-1)\,\mathrm{d}x = \Big[x^3-x\Big]_{-1}^{1} = 0,$$

$$(p_1,p_2) = \int_{-1}^{1} 1\cdot x(3x^2-1)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix}\text{Integranden udda,}\\ \text{integrationsintervallet}\\ \text{symmetriskt kring 0.}\end{bmatrix} = 0.$$

Funktionerna är alltså parvis ortogonala. För deras normer har man:

$$\|p_0\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2\,\mathrm{d}x = 2, \|p_1\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

och

$$\|p_2\|^2 = \int_{-1}^{1} (3x^2-1)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (9x^4-6x^2+1)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\left(\frac{9}{5}-2+1\right) = \frac{8}{5}.$$

$$\textbf{Svar: } \|p_0\| = \sqrt{2}, \|p_1\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ och } \|p_2\| = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}.$$

b. $\|f-g\|$ är minimal då $a_i = \dfrac{(f,p_i)}{\|p_i\|^2}, i = 0,1,2$. Detta ger

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\cdot 1\,\mathrm{d}x}{2} = \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}, a_1 = \frac{\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\cdot x\,\mathrm{d}x}{2/3} = \frac{3}{2}\cdot\Big[(x-1)\,\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{1} = 3\,\mathrm{e}^{-1}$$

och

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\cdot(3x^2-1)\,\mathrm{d}x}{8/5} = \frac{5}{8}\cdot\left(\Big[(3x^2-1)\,\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 6x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{5}{8}\cdot\Big[(3x^2-1-6(x-1))\,\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{1} = \frac{5}{4}\,\mathrm{e} - \frac{7}{4}\,\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\textbf{Svar: } a_0 = \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}, a_2 = 3\mathrm{e}^{-1} \text{ och } a_3 = \frac{5\mathrm{e}}{4} - \frac{7\mathrm{e}^{-1}}{4}.$$

3. a. Man har, eftersom $y[n] = 0$ då $|n| \geq 3$,

$$\begin{aligned} y[n] &\overset{\mathcal{TDFT}}{\longrightarrow} Y_{\mathrm{d}}(\omega/(2\pi)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} = \sum_{n=-2}^{2} y[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} \\ &= \cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\pi} + \cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} + \cos 0 + \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} + \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi} \\ &= \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\pi}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi}) + 1 = \cos 2\omega + \sqrt{3}\,\cos\omega + 1. \end{aligned}$$

$$\textbf{Svar: } \cos 2\omega + \sqrt{3}\,\cos\omega + 1.$$

Anmärkning: ω motsvarar $2\pi\nu$ i Hjalmarssons kompendium.

b. För periodiska diskreta följder $u[n]$ med periodlängd N är med Hjalmarssons definition:

$$u[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longrightarrow} \sum_{n=<N>} u[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}$$

(Med Oppenheim-Willskys definition skall detta uttryck dessutom divideras med N.) I detta fall är $N = 12$ och man får transformen

$$\begin{aligned} \sum_{<12>} u[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/12} &= \sum_{n=-5}^{6} y[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi kn/6} = \lceil y[n] = 0, \text{ då } |n| \geq 3\rceil \\ &= \sum_{n=-2}^{2} y[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi kn/6} = Y_{\mathrm{d}}(\omega/(2\pi)),\ \text{med } \omega = \pi k/6 \\ &= \lceil\text{Enl. svaret till a.}\rceil = \cos\pi k/3 + \sqrt{3}\,\cos\pi k/6 + 1. \end{aligned}$$

Svar : $\cos\pi k/3 + \sqrt{3}\,\cos\pi k/6 + 1$, (Hj:s variant) respektive $(\cos\pi k/3 + \sqrt{3}\,\cos\pi k/6 + 1)/12$, (OW:s variant).

4. a. Man har

$$
\begin{aligned}
X(\mathrm{j}\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{j}\,\omega)t}}{1-\mathrm{j}\,\omega}\right]_{t=-1}^{0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\,\omega)t}}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)}\right]_{t=0}^{1} \\
\lceil a + a^* = 2\,\mathrm{Re}\,a \rceil &= \frac{1}{1-\mathrm{j}\,\omega} - \frac{\mathrm{e}^{-1+\mathrm{j}\omega}}{1-\mathrm{j}\,\omega} + \left(-\frac{\mathrm{e}^{-1-\mathrm{j}\omega}}{1+\mathrm{j}\,\omega} + \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega}\right) \\
&= \frac{2}{1+\omega^2} - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{-1+\mathrm{j}\omega}}{1-\mathrm{j}\,\omega}.
\end{aligned}
$$

Eftersom $\dfrac{\mathrm{e}^{-1+\mathrm{j}\omega}}{1-\mathrm{j}\,\omega} = \mathrm{e}^{-1}\,\dfrac{(\cos\omega + \mathrm{j}\sin\omega)(1+\mathrm{j}\,\omega)}{1+\omega^2}$, så avläser man att $\mathrm{Re}\,\dfrac{\mathrm{e}^{-1+\mathrm{j}\omega}}{1-\mathrm{j}\,\omega} = \mathrm{e}^{-1}\,\dfrac{\cos\omega - \omega\sin\omega}{1+\omega^2}$ och man får

Svar: $2\,\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}(\cos\omega - \omega\sin\omega)}{1+\omega^2}$.

b. Perioden är 3 $\Rightarrow$ den komplexa fourierserien har formen

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi n t/3}, \text{ där } a_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} z(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi n t/3}\,\mathrm{d}t.
$$

Eftersom $z(t) = x(t)$, då $-1 < t \le 2$ och $x(t) = 0$ då $1 < t < 2$, så är

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi n t/3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi n t/3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}X(\mathrm{j}\,2\pi n/3) \\
&= \lceil \text{Enl. svaret till a.} \rceil = \frac{2}{3}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-1}(\cos\omega - \omega\sin\omega)}{1+\omega^2}\right]_{\omega = 2\pi n/3}.
\end{aligned}
$$

Svar: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi n t/3}$, där $a_n = 2\,\dfrac{3-\mathrm{e}^{-1}(3\cos 2\pi n/3 - 2\pi n\sin 2\pi n/3)}{9+4\pi^2 n^2}$.

5. a. Vi använder egenvärdesmetoden för att lösa systemet. På matrisform kan det skrivas:

$$
\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},
$$

Egenvärdena ges av:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; & (-\lambda)^2(-1-\lambda) + 2\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot(-1-\lambda)\cdot 1 \\
& = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2+\lambda-2) = 0 \\
\Leftrightarrow\; & \lambda = 0, 1 \text{ eller } -2.
\end{aligned}
$$

Motsvarande egenvektorer:

$$\lambda = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = 1: \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \left[\begin{array}{l} \text{1:a raden är en linjär} \\ \text{kombination av de två} \\ \text{andra} \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = -2: \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \left[\begin{array}{l} \text{1:a raden är en linjär} \\ \text{kombination av de två} \\ \text{andra} \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger den allmänna lösningen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}.$$

Svar: $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & & & 2B\mathrm{e}^t & - & 2C\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2 & = & A & - & B\mathrm{e}^t & + & C\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3 & = & -A & + & 2B\mathrm{e}^t & + & C\mathrm{e}^{-2t}, \end{array} \right.$ A, B och C godtyckliga konstanter.

b. Eftersom $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^t = \infty$ och $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$, så innebär villkoret att $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ skall ha reellt gränsvärde då $t \to \infty$, att $B = 0$ men A och C godtyckliga. Villkoren $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$ är då uppfyllda om och endast om

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 1 & = & & - & 2C, \\ 2 & = & A & + & C, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} A & = & 5/2, \\ C & = & -1/2. \end{array} \right.$$

Svar: $x_1 = \mathrm{e}^{-2t}, x_2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}, x_3 = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$

6. a. Man får $Y(\mathrm{j}\,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n X(\mathrm{j}\,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n/10} = X(\mathrm{j}\,\omega)\sum_{n=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/10})^n$, som är en geometrisk serie med kvoten $a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/10}$. Kvotens belopp är $= a < 1$, så serien är konvergent med summan $\dfrac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/10}}$.

$$\textbf{Svar: } Y(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/10}} \cdot X(\mathrm{j}\,\omega)$$

b. $x_{\text{test}} = (\sin 880\pi t) \cdot \mathrm{rect}_4(t)$, varav

$$\begin{aligned}
X_{\text{test}}(\mathrm{j}\,\omega) &= \frac{\pi}{\mathrm{j}}\left(\delta(\omega - 880\pi) - \delta(\omega + 880\pi)\right) * \frac{4}{\pi}\,\mathrm{sinc}\,(2\omega/\pi) \\
&= \frac{4}{\mathrm{j}}\left(\mathrm{sinc}\,(2(\omega - 880\pi)/\pi) - \mathrm{sinc}\,(2(\omega + 880\pi)/\pi)\right) \qquad (**) \\
&= \frac{4}{\mathrm{j}}\left(\frac{\sin(2(\omega - 880\pi))}{2(\omega - 880\pi)} - \frac{\sin(2(\omega + 880\pi))}{2(\omega + 880\pi)}\right) \\
&= \frac{2\sin 2\omega}{\mathrm{j}}\left(\frac{1}{\omega - 880\pi} - \frac{1}{\omega + 880\pi}\right) \\
&= \frac{4 \cdot 880\pi}{\mathrm{j}} \cdot \frac{\sin 2\omega}{\omega^2 - (880\pi)^2}. \\
Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,\omega) &= \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/10}} \cdot \frac{4 \cdot 880\pi}{\mathrm{j}} \cdot \frac{\sin 2\omega}{\omega^2 - (880\pi)^2}.
\end{aligned}$$

$$\textbf{Svar: } Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{4 \cdot 880\pi}{\mathrm{j}} \cdot \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/10}} \cdot \frac{\sin 2\omega}{\omega^2 - (880\pi)^2}.$$

c. Man har

$$\begin{aligned}
Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,880\pi) &= \left[\frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/10}}\right]_{\omega = 880\pi} \cdot X_{\text{test}}(\mathrm{j}\,880\pi) = \left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,88\pi} = 1 \\ \text{och enl. } (**).\end{array}\right] \\
&= \frac{4}{\mathrm{j}} \cdot \frac{1}{1 - a} \cdot (\mathrm{sinc}\,0 - \mathrm{sinc}\,(4 \cdot 880)) = \left[\begin{array}{l}\mathrm{sinc}\,0 = 1 \text{ och} \\ \mathrm{sinc}\,n = 0, \\ \text{då } n \text{ heltal} \neq 0.\end{array}\right] \\
&= \frac{4}{\mathrm{j}} \cdot \frac{1}{1 - a}.
\end{aligned}$$

Ett alternativ:

$$\begin{aligned}
Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,880\pi) &= \lim_{\omega \to 880\pi} Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,\omega) \\
&= \frac{4 \cdot 880\pi}{\mathrm{j}}\left[\frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/10}}\right]_{\omega = 880\pi} \cdot \lim_{\omega \to 880\pi} \frac{\sin 2\omega}{\omega^2 - (880\pi)^2} \\
\text{[l'Hospitals regel]} \quad &= \frac{4 \cdot 880\pi}{\mathrm{j}} \cdot \frac{1}{1 - a} \cdot \lim_{\omega \to 880\pi} \frac{2\cos 2\omega}{2\omega} \\
&= \frac{4 \cdot 880\pi}{\mathrm{j}} \cdot \frac{1}{1 - a} \cdot \frac{1}{880\pi} = \frac{4}{\mathrm{j}} \cdot \frac{1}{1 - a}.
\end{aligned}$$

Till slut erhålls: $|Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,800\pi)| \approx 6,5 \Rightarrow \dfrac{4}{1 - a} = \pm\dfrac{11}{2} \Rightarrow a_+ \approx 3/11 \approx 0,273$ eller $a_- \approx 19/11$. Det senare värdet förkastas eftersom $a < 1$.

$$\textbf{Svar: } Y_{\text{test}}(\mathrm{j}\,880\pi) = \frac{4}{\mathrm{j}} \cdot \frac{1}{1 - a},\ a \approx 0,273.$$