Lösningsskisser, Signaler&system I, 5B1209/5B1215:2, 050830

1. Ekvationen är linjär och av 1:a ordningen. Med koefficienten 1 framför y'-termen får den formen

$$y' + \frac{4x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2}. \qquad (*)$$

Integrerande faktor är

$$\exp\left(\int \frac{4x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) = \exp(2\ln(1+x^2)) = (1+x^2)^2.$$

Multipliceras ekavationen $(*)$ med denna faktor får man

$$((1+x^2)^2y)' = x(1+x^2) = x + x^3,$$

varav efter integration

$$(1+x^2)^2y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C.$$

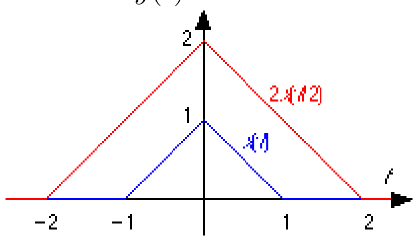
Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger nu

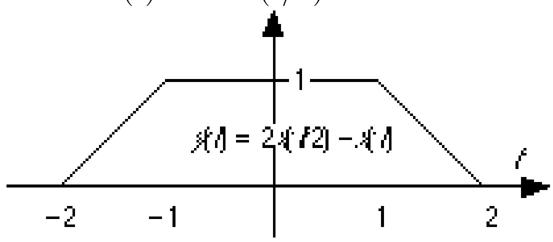
$$4 \cdot 1 = \frac{3}{4} + C \Leftrightarrow C = \frac{13}{4}.$$

och

$$\textbf{Svar: } y = \frac{x^4 + 2x^2 + 13}{4(1+x^2)^2}.$$

2. a. Grafen för $y(t)$ kan konstrueras ur de för $x(t)$ och $2x(t/2)$:



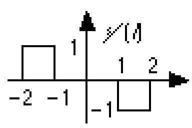


och man får att

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } |t| \geq 2, \\ 1, & \text{då } |t| \leq 1, \\ 2+t, & \text{då } -2 < t < -1, \\ 2-t, & \text{då } 1 < t < 2. \end{cases}$$

varav

$$y'(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } |t| < 1 \text{ eller } |t| > 2, \\ 1, & \text{då } -2 < t < -1, \\ -1, & \text{då } 1 < t < 2. \end{cases}$$



och

$$y''(t) = \{0\} + \delta(t+2) - \delta(t+1) - \delta(t-1) + \delta(t-2).$$

Fouriertransformering av den senaste relationen ger

$$(\mathrm{j}\omega)^2Y(\omega) = \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega} = 2\cos 2\omega - 2\cos\omega,$$

dvs.

$$Y(\mathrm{j}\omega) = 2\,\frac{\cos\omega - \cos 2\omega}{\omega^2}, (Y(0) = 3).$$

(Värdet av $Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{d}t$ = [Arean under y:s graf], kan avläsas i den andra figuren ovan. Alternativt kan man använda att $Y(0) = \lim_{\omega\leftarrow 0} Y(\omega)$, vilket t.ex. kan beräknas med hjälp av MacLaurinutveckling.)

$$\textbf{Svar: } y'(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } |t| < 1 \text{ eller } |t| > 2, \\ 1, & \text{då } -2 < t < -1, \\ -1, & \text{då } 1 < t < 2, \end{cases}$$

$$y''(t) = \delta(t+2) - \delta(t+1) - \delta(t-1) + \delta(t-2).$$

$$Y(\mathrm{j}\omega) = 2\,\frac{\cos\omega - \cos 2\omega}{\omega^2}, \; (Y(0) = 3).$$

3. a. Vi använder egenvärdesmetoden.

Systemets matris: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Dess egenvärden: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ eller 6.

Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u + v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och till egenvärdet $\lambda = 6$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2u - 3v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Funktionerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{6t}$ utgör två linjärt oberoende reella lösningar till det homogena systemet. Dess allmänna lösning kan därför skrivas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{t} + B\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{6t} \textbf{ : Svar}$$

b. För konstantlösningar (och endast dessa) är $x'(t) = y'(t) = 0$, vilket i det här fallet ger sambanden:

$$\begin{cases} 0 = 4x + 3y - 1, \\ 0 = 2x + 3y + 7, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Summan av denna konstantlösning och den allmänna lösningen till systemet i a. utgör den allmänna lösningen till systemet i b.:

$$\begin{cases} x(t) = 4 + A\,\mathrm{e}^{t} + 3B\,\mathrm{e}^{6t}, \\ y(t) = -5 - A\,\mathrm{e}^{t} + 2B\,\mathrm{e}^{6t}. \end{cases}$$

För att få den lösning som uppfyller $x(0) = 0$ och $x'(0) = 1$ deriverar vi $x(t)$:

$$x'(t) = A\,\mathrm{e}^{t} + 18B\,\mathrm{e}^{6t}$$

och får villkoren:

$$\begin{cases} 0 = 4 + A + 3B, \\ 1 = - A + 18B. \end{cases} \Leftrightarrow A = -5 \text{ och } B = \frac{1}{3},$$

vilket ger

$$\textbf{Svar: } \begin{cases} x(t) = 4 - 5\,\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{6t}, \\ y(t) = -5 + 5\,\mathrm{e}^{t} + \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{6t}. \end{cases}$$

4. De komplexa π-periodiska fourierserierna har formen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\mathrm{j}nt}$$

det här fallet är

$$x(t) = \sin^4 t = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}\right)^4 =$$

$$\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{j}t} - 4\,\mathrm{e}^{3\mathrm{j}t}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t} + 6\,\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}\cdot\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t} - 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\cdot\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}t} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{j}t}}{2^4\,\mathrm{j}^4} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{16}}_{c_2}\mathrm{e}^{4\mathrm{j}t}\underbrace{-\frac{1}{4}}_{c_1}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}+\underbrace{\frac{3}{8}}_{c_0}\underbrace{-\frac{1}{4}}_{c_{-1}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}+\underbrace{\frac{1}{16}}_{c_{-2}}\mathrm{e}^{4\mathrm{j}t}$$

och man avläser

Svar: $\sin^4 t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\mathrm{j}nt}$, där $c_n = 0$ om $|n| \geq 3, c_{\pm 2} = \frac{1}{16}, c_{\pm 1} = -\frac{1}{4}$ och $c_0 = \frac{3}{8}$.

5. a. Man har

$$x[n] = (2^{-1})^{|n|}\left\{\begin{array}{ll} (-1)^{n/2}, & \text{då } n \text{ är ett jämnt heltal,} \\ 0, & \text{då } n \text{ är ett udda heltal.} \end{array}\right\}$$

där uttrycket inom klammern =

$$\left\{\begin{array}{rl} 1, & \text{då } n = 0, \pm 4, \pm 8, \ldots \\ 0, & \text{då } n = \pm 1, \pm 5, \pm 9, \ldots \\ -1, & \text{då } n = \pm 2, \pm 6, \pm 10, \ldots \\ 0, & \text{då } n = \pm 3, \pm 7, \pm 10, \ldots \end{array}\right\} = \cos\frac{n\pi}{2}.$$

dvs.

$$x[n] = a^{|n|}\cos\frac{n\pi}{2} \text{ med } a = \frac{1}{2}.$$

$$\textbf{Svar: } a = \frac{1}{2}.$$

b. *Variant 1.* (Tabellanvändning):

Man har

$$a^{|n|} \xrightarrow{\text{TDFT}} \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega}, \qquad (|a| < 1, \omega = 2\pi\nu)$$

$$x[n]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\alpha} \xrightarrow{\text{TDFT}} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\alpha)})$$

alltså

$$(1/2)^{|n|} \xrightarrow{\text{TDFT}} \frac{1-1/4}{1+1/4-2\cdot(1/2)\,\cos\omega} = \frac{3}{5-4\,\cos\omega},$$

varav

$$(1/2)^{|n|}\cos\frac{n\pi}{2} = \frac{1}{2}\,(1/2)^{|n|}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi/2} + \tfrac{1}{2}\,(1/2)^{|n|}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi/2}$$

$$\xrightarrow{\text{TDFT}} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5-4\,\cos(\omega-\pi/2)} + \frac{3}{5-4\,\cos(\omega+\pi/2)}\right) =$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5-4\,\sin\omega} + \frac{1}{5+\,\sin\omega}\right) = \frac{15}{25-16\,\sin^2\omega}.$$

$$\textbf{Svar: } X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{15}{25-16\,\sin^2\omega}\left(= \frac{15}{9+16\,\cos^2\omega} = \frac{15}{17+8\,\cos 2\omega}\right).$$

Variant 2. (Direkt beräkning):

Observera att

$$x[n] = \left\{\begin{array}{ll} (-1/4)^{|k|}, & \text{då } n = 2k, \\ 0, & \text{då } n = 2k+1. \end{array}\right.$$

Då är

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1/4)^{|k|}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega k} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1/4)^{-k}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega k} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1/4)^{k}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega k} = \lceil\text{Sätt } k=-l \text{ i den första summan.}\rceil =$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega}}{4}\right)^{l} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}}{4}\right)^{k} = \lceil\text{Geometriska serier.}\rceil =$$

$$-\frac{e^{2j\omega}}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{2j\omega}}+\frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}=\frac{4}{4+e^{-2j\omega}}-\frac{e^{2j\omega}}{4+e^{2j\omega}}=$$

$$\frac{16+4\,e^{2j\omega}-4\,e^{2j\omega}-1}{(4+e^{-2j\omega})(4+e^{2j\omega})}=\frac{15}{17+4(e^{2j\omega}+e^{-2j\omega})}=\frac{15}{17+8\,\cos 2\omega}$$

$$\left(=\frac{15}{17+8(1-2\sin^2\omega)}=\frac{15}{25-16\sin^2\omega}=\frac{15}{9+16\cos^2\omega}\right).$$

6. a. $$2\pi\, x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\ e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\omega\ e^{j\omega t}d\omega=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(e^{j\omega}+e^{-j\omega})\,e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(e^{j(1+t)\omega}+e^{j(-1+t)\omega})\,d\omega=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j(1+t)\omega}}{j(1+t)}\right]_{\omega=-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j(-1+t)\omega}}{j(t-1)}\right]_{\omega=-\pi/2}^{\pi/2}=\lceil e^{j\pi/2}=j,e^{-j\pi/2}=-j\rceil=$$

$$\frac{1}{2j}\frac{j\,e^{j\pi t/2}-(-j)\,e^{-j\pi t/2}}{1+t}+\frac{1}{2j}\frac{-j\,e^{j\pi t/2}-j\,e^{-j\pi t/2}}{t-1}=$$

$$\frac{e^{j\pi t/2}+e^{-j\pi t/2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)=\cos\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{-2}{t^2-1}.$$

Svar: $x(t)=\dfrac{\cos\frac{\pi t}{2}}{\pi(1-t^2)}$.

Alternativt kan man derivera $X(j\omega)$ två gånger och därav se att $\frac{d^2X}{d\omega^2}+X=\delta(\omega+\pi/2)+\delta(\omega-\pi/2)$. Återtransformering av denna likhet ger direkt $((-j)^2t^2+1)\,x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\,(e^{j\pi t/2}+e^{-j\pi t/2})=\dfrac{1}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}$, dvs. $x(t)=\dfrac{\cos\frac{\pi t}{2}}{\pi(1-t^2)}$.

b. Vi har att
$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi t}{2}}{1-t^2}\,dt=\pi\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,dt$$

Enligt fouriertransformens definition är
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \text{ och speciellt } \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,dt=X(0).$$

Alltså
$$I_1=\pi\cdot\cos 0=\pi.$$

Svar: $I_1=\pi$.

c. Tillämpas Parsevals relation,
$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega,$$
på funktionerna i a.-uppgiften, så får man i vänstra ledet:
$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{\pi t}{2}}{\pi(1-t^2)}\right)^2dt=\frac{2}{\pi}\cdot I_2,$$
och i högra ledet:
$$\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\omega\ d\omega=\frac{\pi}{2}.$$

Detta ger

Svar: $I_2=\dfrac{\pi^2}{4}$.