Lösningar till tentamen, SF1635, Signaler o. system I
080603

(1.) Ekvationen är linjär och av 1:a ordningen. Vi använder integrerande-faktor-metoden. På "standardiserad" form lyder ekvationen

$$y' + \frac{x}{x^2+1}\, y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad [*]$$

Integrerande faktor är $e^{\int \frac{x}{x^2+1}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = \sqrt{x^2+1}$

Multipliceras [*] med denna får man

$$\underbrace{\sqrt{x^2+1}\, y' + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, y}_{= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot y\right)} = 2x$$

Integration ger $\sqrt{x^2+1}\cdot y = x^2 + C$, dvs.

Svar: $y = \dfrac{x^2+C}{\sqrt{x^2+1}}$, C konstant

(2.) Ekvationen är linjär, av 2:a ordningen och har konstanta koefficienter. Dessutom finns begynnelsevillkor. Vi använder oss av Laplacetransformering och får

$$s^2Y(s) - s\cdot 0 - 1 + 15\left(sY(s) - 0\right) + 56\,Y(s) = e^{-2s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(s^2 + 15s + 56\right)}_{=(s+7)(s+8)} Y(s) = 1 + e^{-2s}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{(s+7)(s+8)}\left(1 + e^{-2s}\right)$$

Men $\dfrac{1}{(s+7)(s+8)} = \dfrac{1}{s+7} - \dfrac{1}{s+8}$, varav

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s+7} - \frac{1}{s+8}\right) + \left(\frac{1}{s+7} - \frac{1}{s+8}\right)e^{-2s}$$

Återtransformering ger, på grund av att,

$$\frac{1}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at}$$

$$\frac{1}{s+a}e^{-2s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a(t-2)}u(t-2),$$

<u>Svar:</u> $y(t) = e^{-7t} - e^{-8t} + \left(e^{-7(t-2)} - e^{-8(t-2)}\right)u(t-2) =$

$$\left(= \begin{cases} e^{-7t} - e^{-8t} & \text{om } t \leq 2 \\ e^{-7t}(1+e^{14}) - e^{-8t}(1+e^{16}) & \text{om } t > 2 \end{cases} \right)$$

---

3. Vi har att

$$\underline{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} te^{it}\cdot e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t\cdot e^{(1-\omega)it}\,dt = \left[\begin{matrix}\text{partiell}\\ \text{integration}\end{matrix}\right] = \left[t\cdot\frac{e^{(1-\omega)it}}{(1-\omega)i}\right]_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-\omega)i}\cdot e^{(1-\omega)it}\,dt = \frac{1}{(1-\omega)i}\underbrace{\left(e^{(1-\omega)i} + e^{-(1-\omega)i}\right)}_{2\cos(1-\omega)} +$$

$$+ \left[\frac{1}{(1-\omega)^2}e^{(1-\omega)it}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\cos(1-\omega)}{(1-\omega)i} + \frac{1}{(1-\omega)^2}\underbrace{\left(e^{(1-\omega)i} - e^{-(1-\omega)i}\right)}_{2i\sin(1-\omega)} =$$

$$= -\frac{2i\cos(1-\omega)}{(1-\omega)} + \frac{2i\sin(1-\omega)}{(1-\omega)^2} = \frac{2i}{(1-\omega)^2}\left(\sin(1-\omega) - (1-\omega)\cos(1-\omega)\right)$$

<u>Svar:</u> $\underline{X}(\omega) = \frac{2i}{(1-\omega)^2}\left(\sin(1-\omega) - (1-\omega)\cos(1-\omega)\right)$

---

4. a. En 2π-periodisk komplex fourierserie har formen

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$ där c_n, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ är komplexa konstanter

I vårt fall är $y(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\cdot\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \left[\begin{matrix}\text{konjugat-}\\ \text{regeln}\end{matrix}\right]$

$$= \frac{1}{8i}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right)\left(e^{it} + e^{-it}\right) =$$

$$= \frac{1}{8i}\left(-e^{-3it} - e^{-it} + e^{it} + e^{3it}\right),$$ där man avläser att

$c_3 = c_1 = \frac{1}{8i}$ och $c_{-1} = c_{-3} = -\frac{1}{8i}$, medan $c_n = 0$ för övriga n.

Svara: $c_3 = c_1 = -c_1 = -c_3 = \frac{1}{8i}$, $c_n = 0$ om $n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 6 \ldots$

b. Parsevals formel för fourierserier $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |y(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

I detta speciella fall alltså

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^4 t = 2\pi\left(\left|-\frac{1}{8i}\right|^2 + \left|-\frac{1}{8i}\right|^2 + \left|\frac{1}{8i}\right|^2 + \left|\frac{1}{8i}\right|^2\right)$$

$$= 2\pi \cdot 4\,\frac{1}{64} = \frac{\pi}{8}$$: Svar b.

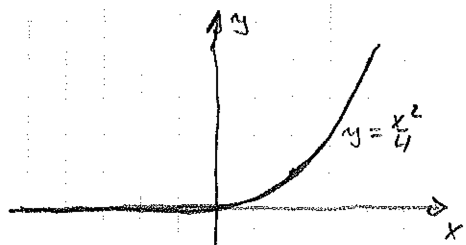
5. a. Ekvationen är separabel och av 1:a ordningen.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \iff \begin{cases} y = 0 \text{ eller} \\ \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx \iff 2\sqrt{y} = x + C \end{cases}$$

Bivillkoret $y(2) = 1 \implies 2 \cdot 1 = 2 + C$, dvs $C = 0$, varav $\sqrt{y} = \frac{x}{2}$ vilket för $x > 0$ är samma sak som att $y = \frac{x^2}{4}$

Svara: $y = \frac{x^2}{4}$, $x > 0$

b. Enligt a så måste den sökta lösningen, för $x > 0$, vara $y = \frac{x^2}{4}$



Däremot satisfierar $y = \frac{x^2}{4}$ inte den givna ekvationen eller villkoret $\sqrt{y} = x$ för $x < 0$. (Ty $\sqrt{y} > 0$.)

Däremot uppfyller konstantfunktionen $y(x) = 0$ differentialekvationen då $x < 0$

(4.)

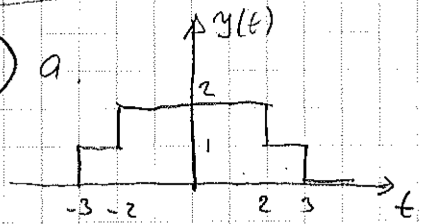
Detta gör att

$$y(t) = \begin{cases} x^2/4, & då\ x > 0, \\ 0, & då\ x \leq 0, \end{cases}$$

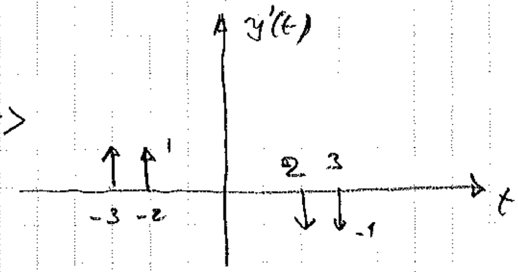
uppfylles diff.ekv. och bivillkor i varje fall om $x \neq 0$, men också för $x = 0$, ty både höger- och vänsterderivata (0, resp $\left(\frac{2x}{4}\Big|_{x=0}\right)$) är $= 0$, dvs $\frac{dy}{dx}(0) = \sqrt{y(0)}$

<u>Svar b:</u> $y(x) = \begin{cases} x^2/4, & då\ x > 0 \\ 0, & då\ x \leq 0 \end{cases}$

(6.) a.



$\Longrightarrow$



$$y'(t) = \delta(t+3) + \delta(t+2) - \delta(t-2) - \delta(t-3)$$

Men $\delta(t+a) \xrightarrow{FT} e^{ia\omega}$ och $y'(t) \xrightarrow{FT} i\omega Y(\omega)$

alltså $i\omega Y(\omega) = e^{3i\omega} + e^{2i\omega} - e^{-2i\omega} - e^{-3i\omega} =$

$$= 2i(\sin 3\omega + \sin 2\omega)$$

dvs. $Y(\omega) = \frac{2}{\omega}(\sin 3\omega + \sin 2\omega)$, då $\omega \neq 0$

För $\omega = 0$: $Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot 1\, dt = \left[\begin{matrix}\text{arean}\\ \text{under grafen}\end{matrix}\right] = 10$

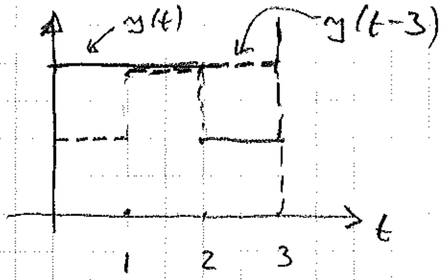
(alternativt $Y(0) = \lim_{\omega \to 0} Y(\omega) = 2\left(\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin 3\omega}{\omega} + \lim_{\omega \to 0} \frac{\sin 2\omega}{\omega}\right) =$

$= 2(3+2) = 10$)

<u>Svar a:</u> $Y(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega}(\sin 3\omega + \sin 2\omega), & då\ \omega \neq 0 \\ 10, & då\ \omega = 0 \end{cases}$

5.

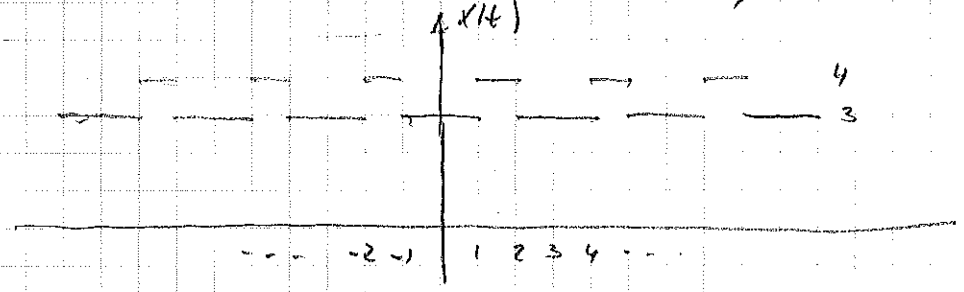
(6b.) För att ta reda på grafens utseende räcker det att betrakta ett intervall av längd 3, t.ex $0 < t < 3$



Övriga grafer $y(t-3n)$ är $= 0$ i detta intervall

Alltså är för $0 < t < 3$

$$x(t) = y(t) + y(t-3) = \begin{cases} 2+1=3, & \text{då } 0<t<1, \\ 2+2=4, & \text{då } 1<t<2, \\ 1+2=3, & \text{då } 2<t<3, \end{cases} \text{ dvs,}$$



: Svar b.

---

c. Enligt fourierserieteorin har man att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-3n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{3}} \text{ där } c_n = \frac{1}{3} Y\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

I vårt fall enligt a:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{2\cdot 3}{2\pi n}\left(\overbrace{\sin 2\pi n}^{=0} + \sin \frac{4\pi n}{3}\right) = \frac{1}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3} n\right), & \text{om } n \neq 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 10 & \text{, om } n = 0 \end{cases}$$

Svar c: $x(t) = \frac{10}{3} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{4\pi}{3} n\right) \cdot e^{\frac{2\pi i n t}{3}}$

---

d. Inspektion av grafen för $y(t)$ ger att t.ex den 5-periodiska fortsättningen i intervallet $0 < t < 5$ ges av

$$y(t) + y(t-5) = \left.\begin{cases} 2+0 = 2, & \text{då } 0<t<2 \\ 1+1 = 2, & \text{då } 2<t<3 \\ 0+2 = 2, & \text{då } 3<t<5 \end{cases}\right\} = 2$$

6d. $p=5$ duger alltså som svar.

[Man kan också analysera fram för vilka $p>0$ som den p-periodiska förbättringen är konstant:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{p}} \text{ konstant } \Longleftrightarrow c_n=0 \text{ om } n\neq 0;$$

dvs. $\frac{1}{p}Y\left(\frac{2n\pi}{p}\right)=0$ då $n\neq 0$

Men $Y\left(\frac{2n\pi}{p}\right)=[\text{enl. a}]=\frac{2p}{2\pi n}\left(\sin\frac{6n\pi}{p}+\sin\frac{4n\pi}{p}\right)=$

$=\left[\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]=$

$=\frac{p}{\pi n}\cdot 2\sin\frac{5n\pi}{p}\cdot\cos\frac{n\pi}{p}$, vilket är $=0$ för alla heltal $n\neq 0$

om och endast om $\frac{5}{p}=$ heltal (då är $\sin\frac{5n\pi}{p}=0$)

eller om $\frac{n}{p}=\frac{1}{2}+$ heltal för alla heltal n, vilket aldrig inträffar, (ty $(n=1)$: $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+$heltal $\Rightarrow \frac{2}{p}=$ heltal, vilket motsägs av $(n=2)$: $\frac{2}{p}=\frac{1}{2}+$ heltal).

De p-värden som duger är alltså $p=\frac{5}{m}$ $m=1,2,3,4\ldots$]

Svar d. : T.ex. $p=5$

(Mera allmänt $p=\frac{5}{m}$, $m=1,2,3,4\ldots$)