Inför tentan för 5B1493

Tentan kommer att omfatta c:a 8 uppgifter av nedanstående typ. Maxpoäng på tentan är 24 och för godkänt krävs 12p inklusive den bonus som du uppnått via inlämningsuppgifter och redovisningsuppgift.

1. Visa att det finns ett reellt tal y sådant att $y^3 = 7$. Visa att detta tal är irrationellt.

2. Visa att $A \quad (B \cap C) = (A \quad B) \cap (A \quad C)$ för alla mängder A**,** B, och C. Rita figur!

3. Finns talet i? Hur definieras det i så fall?

4. Definiera en relation ≈ på **Z** genom att låta $n \approx m$ om det finns ett tal k **Z** sådant att $n - m = 2k$. Är detta en ekvivalensrelation? Vilka är i så fall ekvivalensklasserna?

5. Visa att $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ är en metrik på **R**. Visa att den är begränsad.

6. Låt f: $[0, 1] \to [0, 1]$ vara kontinuerlig. Visa att f har minst en fixpunkt, dvs. en punkt x_0 för vilken $f(x_0) = x_0$. (*Ledning*: Studera funktionen $g(x) = f(x) - x$.)

7. Anta att f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ är sådan att $x \to f(x, y_0)$ är kontinuerlig för varje fixt y_0 och $y \to f(x_0, y)$ är kontinuerlig för varje fixt x_0. Måste $f(x, y)$ då vara kontinuerlig?

8. Om x är irrationellt och r rationellt, vad kan sägas om $x + r$ och xr?

9. Visa att villkoret $x > 0$, $y > 0 \qquad xy > 0$ är ekvivalent med villkoret $x < y, z > 0 \qquad xz < yz$.

10. Bevisa med Peanos axiom att $1 + y = y + 1$ för alla y **N**. För högre betyg: Bevisa med Peanos axiom att addition av naturliga tal är en kommutativ operation.

11. Går det att införa en ordningsrelation på **C**?

12. Är mängden av alla följder av nollor och ettor uppräknelig?

13. Är **Q** en öppen delmängd av **R**? Sluten? Vilka punkter är inre punkter? Hopningspunkter?

14. Låt **A** vara en sluten delmängd av en kompakt mängd **B**. Ge ett direkt bevis för att varje öppen övertäckning av **A** har en ändlig delövertäckning.

15. a. Ge några olika definitioner av vad en kontinuerlig funktion f mellan metriska rum **M** och **N** är och visa att de är ekvivalenta.
    b. Låt **M** vara ett metriskt rum och f: $\mathbf{M} \to \mathbf{R}$ kontinuerlig. Visa att $\{p \quad \mathbf{M} ; f(p) = 0\}$ är en sluten mängd.

16. Låt $p > 0$. Visa med hjälp av gränsvärdesdefinitionen:
    a. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 0$, b. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n}{(1 + p)^n} = 0$,

17. Antag att f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är sådan att $|f(x) - f(y)| \le (x - y)^2$ för alla x och y. Vad kan du dra för slutsats om f på grundval av detta?

18. Visa med hjälp av derivatans definition att $\mathrm{D}\sqrt{x} = 1/(2\sqrt{x})$.

19. Anta att f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig och att $f'(x)$ existerar för alla $x \neq 0$ och att $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x) = 1$. Vad kan sägas om $f'(0)$?

20. Låt f: $(a, b) \to \mathbf{R}$ vara deriverbar. Vilka av följande påståenden är sanna respektive falska:
a. $f'(x) > 0$ för alla $x \quad (a, b) \qquad f$ är strängt växande.

b. f är strängt växande $f'(x) > 0$ för alla x (a, b).

21. Anta att en deriverbar f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uppfyller att $f'(x) \neq 1$ för alla x. Visa att f har högst en fixpunkt.

22. Låt f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vara definierad som följer: $f(x) = 0$ för $x \leq 0$, $f((x) = e^{-1/x}$ för $x > 0$. Bevisa att f har derivator av alla ordningar fär alla x $\mathbf{R}$. Hur ser MacLaurinutvecklingen ut? Varför är detta exempel intressant?

23. Låt $a > 1$ och $x_0 > \sqrt{a}$. Låt $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Visa att följden är monoton och att dess gränsvärde är $\sqrt{a}$. Om ε_n är felet man gör om man approximerar $\sqrt{a}$ med x_n, dvs $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{a}$, säg något om hur snabbt detta fel går mot 0 då $n \to \infty$.

24. Låt f: $[0, 1] \to [0, 1]$ vara kontinuerlig och anta att $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Visa att $f(x) = 0$ för alla x $[0, 1]$. Vad kan sägas om f inte är kontinuerlig?

25. Visa att potensserierna $\sum c_n x^n$ och $\sum n c_n x^n$ har samma konvergensradie.

26. Beräkna konvergensradien till potensserien $\sum \frac{n^n}{n!} x^n$.

27. Visa att funktionen $g(x) = 1$ för rationella x och 0 för irrationella x inte är Riemannintegrerbar på intervallet $[0, 1]$.

28. Låt $f_n(x) = \dfrac{x^2 + (n^2 + 1)x + 1/n^2}{n^2 + x}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

Visa att f_n konvergerar mot en gränsfunktion f i intervallet $[0, 1]$ och att konvergensen är likformig.

Beräkna sedan $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

29. Låt $C[0, 1]$ vara mängden av alla kontinuerliga reellvärda funktioner definierade på $[0, 1]$. Visa att

$$d(f, g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

är en metrik på $C[0, 1]$.

30. Med samma beteckningar som i föregående uppgift: är det sant att $f_n \to f$ likformigt på $[0, 1]$ om $f_n \to f$ i metriken d?