Dagens teman

- Linjära ODE (ZC 4.1)
- Lösning av homogena 1:a ordnings ekvationer.
- Terminologi: Lösning, begynnelsevärdes-problem, randvärdesproblem. (ZC4.1)
- Allmänt om existens och entydighet hos lösningar. (ZC4.1)

Linjära ODE av godtycklig ordning:

ZC 4.1

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots a_1(x)y' + a_0(x)y =$$

$$= \begin{cases} g(x). & \text{Allmänna fallet,} \quad \text{(A)} \\ 0. & \text{Homogena fallet,} \quad \text{(H)} \end{cases}$$

Det ”enklaste” fallet, 1:a ordningens homogena ekvationer,

$$y' + a_0(x)y = 0,$$

har som allmän lösning

$$y(x) = C\,e^{-A_0(x)}, \quad (*)$$

där C är en godtycklig konstant och $A_0(x)$ är någon primitiv funktion till $a_0(x)$.

Detta kommer man fram till ex.vis på följande vis:

Om $y \neq 0$, så kan ekvationen skrivas

$$\frac{y'}{y} = -a_0(x) \Leftrightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = -\underbrace{\int a_0(x)\,dx}_{A_0(x)} + B$$

$$\Leftrightarrow \ln|y(x)| = -A_0(x) + B \Leftrightarrow y(x) = C\,e^{-A_0(x)},$$

där $|C| = e^B$ (konstant $\neq 0$)

Vidare är $y = 0$ uppenbarligen en lösning (”den triviala lösningen”). Denna kommer också med i uttrycket (*) om C tillåts vara $= 0$.

För *begynnelsevärdesproblem* (inital value problems) söker man lösningar i ett intervall som innehåller ”begynnelsepunkten” x_0, samt där de n talen

$$y^{(n-1)}(x_0),\ \ldots,\ y'(x_0),\ y(x_0)$$

antar föreskrivna värden. (ZC 4.1.1)

För *randvärdesproblem* (boundary value problems) söker man istället lösningar i något intervall $a \leq x \leq b$, lösningar som dessutom uppfyller n st föreskrivna villkor på den och/eller dess derivator i *båda* ändpunkterna. (ZC 4.1.1)

Existens- och entydighetssats (ZC, Th 4.1):

Om koefficienterna och HL i ekvationen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

är kontinuerliga i ett intervall, så kommer varje begynnelsevärdesproblem (med begynnelsepunkten i intervallet) att ha en och endast en lösning i det intervallet.