Dagens teman

- Fouriermetoder, inledning

Komplexa fourierserier	(FM 1.1)
Fouriertransformen (orientering)	(FM 1.1)
Energi hos signal, Parsevals relation	(FM 1.2, 3)
LTI-system (orientering)	(FM 1.4)

Komplex fourierserieutveckling, L-periodisk:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi i n t/L}, \qquad \text{(Syntesekvation)}$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t) \, e^{-2\pi i n t/L} \, dt \qquad \text{(Analysekvation)}$$

Om $x(t)$ reell och

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{L} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} t \right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi i n t/L}$$

så gäller

$$\begin{cases} a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, & \text{då } n \geq 0, \\ b_n = -2 \operatorname{Im} c_n, & \text{då } n \geq 1. \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - i b_n}{2}, & \text{då } n > 0, \\ \dfrac{a_{-n} + i b_{-n}}{2}, & \text{då } n < 0, \\ c_0 = \dfrac{a_0}{2}, & \text{då } n = 0. \end{cases}$$

Fouriertransformen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \qquad \text{(Syntesekvation)}$$

där

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \qquad \text{(Analysekvation)}$$

Skalärprodukt för komplexa funktioner

Skalärprodukt:

$x(t)$ och $y(t)$ definierade i intervall $a < t < b$
($a = -\infty$ och/eller b $= \infty$ ej uteslutna).

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ortogonalitet:

$$x(t) \qquad y(t) \Leftrightarrow (x(t), y(t)) = 0.$$

Viktigt exempel: Om m och n olika heltal så är

$$\mathrm{e}^{2\pi i n t/L} \qquad \mathrm{e}^{2\pi i m t/L} \text{ på intervall av längd } L.$$

Norm:

$$\|x(t)\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t \right)^{1/2} = \sqrt{(x(t), x(t))}.$$

Exempelvis: På intervall av längd L:

$$\|\mathrm{e}^{2\pi i n t/L}\|^2 = L.$$

Storheten $\|x(t)\|^2$ är ett mått på signalens energiinnehåll.

Parsevals relation

För fourierserier:

$$\text{Om } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi i n t/L}, \text{ så är}$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

För fourierintegraler:

$$\text{Om } x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \text{ så är}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega.$$

Energitolkning av dessa relationer

”Energin hos en signal
= summan av delsvängningarnas energi.”