Dagens tema

- Fouriertransformen, räkneexempel

Egenskaper hos fouriertransformen

Funktion	Transform
Om $x(t)$	$Z(\omega)$
så $Z(t)$	$2\pi \cdot x(-\omega)$
$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{i\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} X(\omega)$
$x(at),\ a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$i\omega X(\omega)$
$t\, x(t)$	$i \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\left(\frac{d}{dt}\right)^n x(t)$	$(i\omega)^n X(\omega)$
$t^n x(t)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$
Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$2\pi/T$-periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(\omega)$
L-periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $2\pi/L \cdot X(\omega)$ med avstånd $2\pi/L$

Speciella transformer

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)$	$e^{-i\omega t_0}+e^{i\omega t_0}=2\cos(\omega t_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\,(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$
$\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)$	$e^{i\omega t_0}-e^{-i\omega t_0}=2i\sin(\omega t_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-\pi i\,(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0))$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$2\pi/T\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi n/T)$
$u(t)$	$\frac{1}{i\omega}+\pi\,\delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$
$\mathrm{rect}(t/P)$	$P\,\mathrm{sinc}\,(P\omega/(2\pi))$
$\mathrm{sinc}\,(t/(2\pi))$	$2\pi\,\mathrm{rect}(\omega)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}(\omega/(2\pi))$

Funktioner med rationella transformer

	Funktion	Transform (ω)
Då n heltal ≥ 0	$\delta^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n$
Då $a > 0$,	$e^{-at}\,u(t)$	$\frac{1}{a + i\omega}$
och n heltal ≥ 1	$\frac{t^{n-1}\, e^{-at}}{(n-1)!}\, u(t)$	$\frac{1}{(a + i\omega)^n}$
Då $a < 0$	$e^{-at}\,u(-t)$	$\frac{1}{a - i\omega}$
och n heltal ≥ 1	$\frac{t^{n-1}\, e^{-at}}{(n-1)!}\, u(-t)$	$\frac{1}{(a + i\omega)^n}$
	sign t	$\frac{2}{i\omega}$
Då n heltal ≥ 1	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ sign t	$\frac{2}{(i\omega)^n}$
Då $a > 0$	$e^{-a\lvert t \rvert}$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
Då $a > 0$	$e^{-a\lvert t \rvert}$ sign t	$-\frac{2i\omega}{a^2 + \omega^2}$

Beräkna fouriertransformerna till följande signaler:

a. $\mathrm{rect}\,(2t - 1)$

b. $\mathrm{e}^{-|t|} \cos 2t$

c. $t\,\mathrm{rect}\,t$

d. $\sin at \cdot \mathrm{rect}\,t$

e. $t \cdot \mathrm{sinc}\,t$

f. $\cos t \cdot \mathrm{sinc}\,t$

g. $\mathrm{sinc}\,t * \mathrm{sinc}\,t$

Svar:

a. $1/2 \operatorname{sinc}(\omega/(4\pi)) \cdot e^{-i\omega/2}$

b. $1/(1+(\omega-2)^2) + 1/(1+(\omega+2)^2)$

c. $i[\omega \cos(\omega/2) - 2 \sin \omega/2)]/\omega^2$

d. $i/2 \cdot [\operatorname{sinc}((\omega + a)/(2\pi)) - \operatorname{sinc}((\omega - a)/(2\pi))]$

e. $i [\delta(\omega + \pi) - \delta(\omega - \pi)]$

f. $1/2 \cdot [\operatorname{rect}((\omega + 1)/(2\pi)) + \operatorname{rect}((\omega - 1)/(2\pi))]$

g. $\operatorname{rect} \omega/(2\pi)$,
(vilket innebär att $\operatorname{sinc} t * \operatorname{sinc} t = \operatorname{sinc} t$!)