

Dagens teman

- Reduktion av ordningen. (ZC4.2)
- Linjära ODE av godtycklig ordning.
Lösningarnas struktur. (ZC4.1)
- Linjära ODE av godtycklig ordning med
konstanta koefficienter. Homogena. (ZC4.3)
- Linjära ODE av godtycklig ordning med
konstanta koefficienter. Inhomogena.
Variation-av-parametermetoden. (ZC4.6)

Reduktion av ordning

ZC4.2

Om $y_1(x)$ är en känd lösning $\neq 0$ till

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

så ger substitutionen

$$y(x) = y_1(x) \cdot u(x), \text{ (} u \text{ ny obekant funktion)}$$

en linjär och homogen differentialekvation av ordning $n - 1$, med $u'(x)$ som obekant.

Linjära ODE av godtycklig ordning: ZC 4.1

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= \\ &= g(x). \quad \text{Allmänna fallet, (A)} \\ &= 0. \quad \text{Homogena fallet, (H)} \end{aligned}$$

Superpositionsegenskaper:

- y_1 och y_2 lösningar till (H)
 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ lösningar till (H) för godtyckliga konstanter c_1 och c_2 .
- y_1 och y_2 lösningar till (A)
 $y = y_1 - y_2$ lösning till (H).
- Om (H) har *reella* koefficienter:
 $y = u + iv$ (u och v reella) en komplex lösning till (H)
 u och v lösningar till (H).

Lösningmängdernas struktur:

- Allmän lösning till (H):

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n,$$

där y_1, y_2, \dots, y_n är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och där c_1, c_2, \dots, c_n är godtyckliga konstanter.

- Allmän lösning till (A):

$$y = y_p + y_h$$

där y_p är någon (vilken som helst) lösning till (A) och y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Definition av ”linjärt oberoende funktioner”:

n st funktioner $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ är linjärt oberoende på ett intervall I om likheten

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) = 0, \quad (*)$$

för alla x i intervallet I , c :na konstanter, är uppfylld endast om c :na alla är $= 0$.

Motsatsen ”linjärt beroende funktioner” innebär att likheten (*) uppfylls med någon av c :na $\neq 0$.

Detta är samma sak som att säga att minst en av y -funktionerna är en linjär kombination av de andra, ex.vis

$$y_1(x) = d_2y_2(x) + \dots + d_ny_n(x)$$

Speciellt: Två funktioner är linjärt beroende om och endast om den ena av dem är en konstant multipel av den andra.

För ekvationer med konstanta koefficienter:

ZC 4.3

- Karakteristisk ekvation ("Auxiliary Equation"):

$$m^n + a_{n-1}m^{(n-1)} + \dots + a_1m + a_0 = 0. \quad (\text{K})$$

- Rötternas relation till ODE:ns lösningar:
Om m_0 är en rot med multiplicitet k till (K) så är

$$y = q(x) \cdot e^{m_0 x},$$

där q är ett godtyckligt polynom av grad högst $k - 1$, lösning till (H).

- Den allmänna lösningen till (H) erhålls genom att man summerar alla lösningarna, som enligt föregående punkt finns för de olika rötterna till (K).

Variation-av-parameter-metoden ZC 4.6

Lösning av inhomogen ekvation med hjälp av den fullständiga lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Låt

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

vara den allmänna lösningen till

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Väljer man funktioner

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x),$$

så att

$$\begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & \dots & y_n & u_1'(x) & 0 \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & u_2'(x) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & u_n'(x) & f(x) \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{array},$$

så kommer

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$$

att vara en partikulärlösning till

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Koefficienterna a_0, a_1, \dots, a_{n-1} och f förutsätts vara kontinuerliga funktioner av x i det betraktade intervallet.