Dagens teman

- Existens och entydighet hos lösningar till ODE (ZC 1.1-2)
- Riktningfält (ZC 2.1)
- Autonoma ekvationer, stabilitet/instabilitet (ZC 2.1)

- **Typisk ODE av ordning 1**

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

- med begynnelsevillkor: $y(x_0) = y_0$ (ZC1.2)

Viktig sats: Existens o entydighetssatsen (Th1.1)

> Om $f(x, y)$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ är kontinuerliga så har begynnelsevärdesproblemet:
>
> $$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$$
>
> en och endast en lösning $y(x)$ i varje fall i någon omgivning av $x = x_0$.

Autonoma ekvationer

ZC 2.1

$$y' = f(y)$$

- Om $f(y_0) = 0$, så är konstanten $y(t) = y_0$ en *jämviktslösning*

Sats

Låt $f(y_0) = 0$ och $\neq 0$ i någon omgivning av y_0.

Om f växlar tecken + 0 – i en omgivning till y_0, så kommer

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = y_0$$

för alla lösningar $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' = f(y),$$

som för något x har värden i denna omgivning.

Om teckenväxlingen däremot är en annan, dvs – 0 +, + 0 + eller – 0 –, så finns i varje omgivning av y_0 lösningar $y(x)$ som inte går mot y_0 då $x \to \infty$.

Om lösningen är av det första slaget så säger man att y_0 är en *(asymptotiskt) stabil* jämviktslösning. Om lösningen är av det andra slaget, kallas den *instabil* (fallet – 0 +) respektive *semistabil* (fallen + 0 + och – 0 –).

- Enkelt testförfarande:

$f(y_0) = 0$ och $f'(y_0) < 0$ $\quad$ y_0 stabil

$f(y_0) = 0$ och $f'(y_0) > 0$ $\quad$ y_0 instabil