# Veckans teman

- Repetition av ordinära differentialekvationer
  ZC 1, 2.1 - 3, 4.1 - 6, 7.4 - 6, 8.1 - 3

## Ekvationstyper

- Första ordningen
  - Separabla
- Högre ordning
- System
- Autonoma
- Linjära
  - med konstanta koefficienter

**Lösningsmetoder**

Första ordningen

- Separation
- Integrerande-faktor-metoden

Linjära av högre ordning

- Reduktion av ordning
- Variation-av-parameterförfarandet

Linjära med konstanta koefficienter

- Homogena fallet/Karakteristisk ekvation
- Ansatsförfaranden
- Laplacetransformering

System med konstanta koefficienter

- Homogena fallet/Egenvärdesmetoden
- Variation-av-parameterförfarandet
- Laplacetransformering

# Separabla ekvationer

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

## Lösningsförfarande:

Ekvationen är ekvivalent med att

$y = a$, konstant, där $a$ är 0-ställena till $g(y)$

eller att

$$\int \frac{1}{g(y)}\, \mathrm{d}y = \int f(x)\, \mathrm{d}x.$$

## Linjära ekvationer (ZC 2.3)

$$y'(x) + P(x)\,y(x) = f(x) \qquad (*)$$

*Lösningsförfarande*:
(”integrerande-faktor-metoden”)

1. Multiplicera ekv (*) med faktorn

$$k(x) = \exp\left(\int^x P(t)\,dt\right)$$

Vänster led i ekvationen kommer då, eftersom

$$k'(x) = k(x)\,P(x),$$

att ha formen

$$k(x)y'(x) + k'(x)\,y(x) = (k(x)\,y(x))'$$

2. Integration av ekvationen

$$(k(x)\,y(x))' = k(x)\,f(x)$$

ger sedan

$$y(x) = \frac{1}{k(x)}\int^x k(t)\,f(t)\,dt$$

(Funktionen $k(x)$ kallas en *integrerande faktor*. Pga integrationskonstanten finns det alltid oändligt många sådana – det räcker förstås att man väljer en av dem.)

- **Typisk ODE av ordning 1**

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

- med begynnelsevillkor: $y(x_0) = y_0$ (ZC1.2)

**Viktig sats**: Existens o entydighetssatsen (Th1.1)

> Om $f(x, y)$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ är kontinuerliga så har begynnelsevärdesproblemet:
>
> $$y'(x) = f(x, y(x)),\; y(x_0) = y_0$$
>
> en och endast en lösning $y(x)$ i varje fall i någon omgivning av $x = x_0$.

- **Typiskt ODE-*system* av ordning 1**

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$$

- med begynnelsevillkor: $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

Funktionerna $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{f}$ är vektorvärda, med värden i $\mathbf{R}^n$, $t$ en reell variabel.

**Viktig sats**: Existens o entydighetssatsen

| |
|---|
| Om $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ och $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x})$ är kontinuerliga så har begynnelsevärdesproblemet: $$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)),\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$ en och endast en lösning $\boldsymbol{x}(t)$ i varje fall i någon omgivning av $t = t_0$. |

# Linjära system av ordning 1

På matrisform kan sådana skrivas:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t).$$

*Homogena system* $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, (H)
*Allmänna system* $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}$ ”godtyckligt”. (A)

Vid *begynnelsevärdesproblem* är dessutom de $n$ obekanta funktionernas värden kända i en ”begynnelsepunkt” $t = t_0$:

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

**Superpositionsegenskaper:** (ZC 8.1)

- $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$ lösningar till (H)
  $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2$ lösningar till (H) för godtyckliga konstanter $c_1$ och $c_2$. (Th 8.2)

- $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$ lösningar till (A)
  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ lösning till (H).

- Om (H) har *reella* koefficienter:

  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ reella) en komplex lösning till (H) $\Leftrightarrow$
  $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ lösningar till (H).

**Lösningmängdernas struktur:** (ZC 8.1)

- Allmän lösning till (H): (Th 8.5)

$$\boldsymbol{x}_h = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n,$$

  där $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ är $n$ st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och
  där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är godtyckliga konstanter.
- Allmän lösning till (A): (Th 8.6)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$$

  där $\boldsymbol{x}_p$ är någon (vilken som helst) lösning till (A) och $\boldsymbol{x}_h$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

## **En lösningsmetod (*egenvärdesmetoden*) för *homogena* system med *konstanta* koefficienter**

(ZC 8.2)

Metoden bygger på ansatsen:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}\, e^{\lambda t},$$

där $\boldsymbol{k}$ är en konstant vektor $\neq \mathbf{0}$ och $\lambda$ en konstant skalär (reell eller komplex).

Ansatsen leder till följande villkor på $\lambda$:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

och följande villkor på $\boldsymbol{k}$:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \text{ dvs.}$$

det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Med hjälp av egenvärdesbestämningar kan alltid $n$ st linjärt oberoende lösningar till (H) bestämmas. Typiska exempel:

(i) ZC 8.2, ex.2 (reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

(ii) ZC 8.2, ex. 6 (icke-reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

och de mera ”ovanliga” fallen:

(iii) ZC 8.2, ex. 3 – 5 (multipla rötter till egenvärdesekvationen).

## En annan metod (Laplacetransformering)

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$s\,\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{F}(s)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(s\mathbf{E} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{F}(s) + \boldsymbol{x}(0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\mathbf{E} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{F}(s) + \boldsymbol{x}(0))$$

Återtransformering ger sedan $\boldsymbol{x}(t)$.

**Variation-av-parametermetoden:**

(ZC 8.3)

En metod för Bestämning av en partikulärlösning av allmänna linjära ODE-system:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{f} \quad \text{"godtyckligt".}$$

Man ansätter

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\,\boldsymbol{U}(t).$$

Där $\Phi(t)$ är en fundamentalmatris, dvs.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

där kolonnerna utgör $n$ st linjärt oberoende lösningar till motsvarande homogena system av differentialekvationer. (I fallet med konstanta $\boldsymbol{A}$ kan en sådan i princip alltid bestämmas med egenvärdesmetoden.)

Man får (ZC sid 356 - 357) att $\boldsymbol{x}(t)$ är en sådan lösning om och endast om $\boldsymbol{U}$ uppfyller villkoret

$$\boldsymbol{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\,\boldsymbol{f}(t).$$

# Egenskaper hos Laplacetransformen

| Funktion | Transform |
|---|---|
| $f(t)$ | $F(s)$ |
| $af(t) + bg(t)$ | $aF(s) + bG(s)$ |
| $e^{at}f(t)$ | $F(s-a)$ |
| $f(t-a)\,u(t-a),\ a>0$ | $e^{-as}\,F(s)$ |
| $f(at),\ a>0$ | $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| $\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right),\ a>0$ | $F(as)$ |
| $(f*g)(t)$ | $F(s)\cdot G(s)$ |
| $\frac{d}{dt}f(t)$ | $s\,F(s) - f(0)$ |
| $t\,f(t)$ | $-\frac{d}{ds}F(s)$ |
| $\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)$ | $s^n F(s) - s^{n-1}f(0) -$ <br> $- s^{n-2}f'(0) - \ldots$ <br> $\ldots - s\,f^{(n-2)}(0) -$ <br> $- f^{(n-1)}(0)$ |
| $t^n f(t)$ | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$ |
| $\int_0^t f(\tau)\,d\tau,\ t>0$ | $\frac{F(s)}{s}$ |

*Speciella transformer*

| Funktion | Transform |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $\delta(t - a),\ a > 0$ | $e^{-as}$ |
| $u(t - a),\ a > 0$ | $\frac{e^{-as}}{s}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s - a}$ |
| $e^{iat}$ | $\frac{1}{s - ia}$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2 + a^2}$ |
| $\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2 + a^2}$ |