# Dagens teman

- ODE-system av första ordningen
  (ZC 7.6, 8.1 - 3)

- Autonoma ekvationer (ZC 2.1.2, 10.2)

## **En lösningsmetod (*egenvärdesmetoden*) för *homogena* system med *konstanta* koefficienter**

(ZC 8.2)

Metoden bygger på ansatsen:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}\, \mathrm{e}^{\lambda t},$$

där $\boldsymbol{k}$ är en konstant vektor $\neq \mathbf{0}$ och $\lambda$ en konstant skalär (reell eller komplex).

Ansatsen leder till följande villkor på $\lambda$:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

och följande villkor på $\boldsymbol{k}$:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \text{ dvs.}$$

det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Med hjälp av egenvärdesbestämningar kan alltid $n$ st linjärt oberoende lösningar till (H) bestämmas. Typiska exempel:

(i) ZC 8.2, ex.2 (reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

(ii) ZC 8.2, ex. 6 (icke-reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

och de mera ”ovanliga” fallen:

(iii) ZC 8.2, ex. 3 – 5 (multipla rötter till egenvärdesekvationen).

# En annan metod (Laplacetransformering)

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$s\,\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{F}(s)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(s\mathbf{E} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{F}(s) + \boldsymbol{x}(0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\mathbf{E} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{F}(s) + \boldsymbol{x}(0))$$

Återtransformering ger sedan $\boldsymbol{x}(t)$.

**Variation-av-parametermetoden:**

(ZC 8.3)

En metod för Bestämning av en partikulärlösning av allmänna linjära ODE-system:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{f} \quad \text{"godtyckligt".}$$

Man ansätter

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\, \boldsymbol{U}(t).$$

Där $\Phi(t)$ är en fundamentalmatris, dvs.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

där kolonnerna utgör $n$ st linjärt oberoende lösningar till motsvarande homogena system av differentialekvationer. (I fallet med konstanta $\boldsymbol{A}$ kan en sådan i princip alltid bestämmas med egenvärdesmetoden.)

Man får (ZC sid 356 - 357) att $\boldsymbol{x}(t)$ är en sådan lösning om och endast om $\boldsymbol{U}$ uppfyller villkoret

$$\boldsymbol{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\, \boldsymbol{f}(t).$$

# Autonoma ekvationer

$$y' = f(y)$$

- Om $f(y_0) = 0$, så är konstanten $y(t) = y_0$ en lösning

  Sådana lösningar kallas *jämviktslösningar*.

- Låt $f(y_0) = 0$ och $\neq 0$ i någon omgivning av $y_0$.

  Då är jämviktlösningen $y_0$ *stabil* om $f(y)$ växlar tecken + 0 – vid $y_0$. Annars är den *instabil*

- Enkelt testförfarande:

  $f(y_0) = 0$ och $f'(y_0) < 0$ $\quad$ $y_0$ stabil

  $f(y_0) = 0$ och $f'(y_0) > 0$ $\quad$ $y_0$ instabil

# Autonoma och homogena linjära system:

$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, där $\boldsymbol{A}$ konstant $n \times n$-matris.

*Jämviktslösningar* = Konstantlösningar

$\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ är alltid en jämviktslösning och om $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, så är det den enda.

*Stabilitet* (för linjära system):

1. En jämviktpunkt $\boldsymbol{X}_0$ till ett linjärt system kallas *asymptotiskt stabil* om *alla* lösningar $\boldsymbol{X}(t) \to \boldsymbol{X}_0$, då $t \to \infty$. (Detta är den stabilitet som beskrivs i ZC sid 448 (*i*).)

2. En jämviktpunkt $\boldsymbol{X}_0$ kallas *instabil* om det finns *någon* lösning $\boldsymbol{X}(t)$, för vilken $|\boldsymbol{X}(t)| \to \infty$, då $t \to \infty$.

3. En jämviktpunkt $\boldsymbol{X}_0$ kallas *stabil* om det för varje lösning $\boldsymbol{X}(t)$ finns en konstant $M$ sådan att $|\boldsymbol{X}(t)| < M$ då $t > 0$.
(Detta kallas ”locally stable” i ZC på sidan 448: (*i*) och (*ii*).)

# Kvalitativa egenskaper hos autonoma system:

(ZC sid 402 – 408),

Exemplen tar bara upp 2×2-fallet

*Om stabilitet*

| Egenskaper hos egenvärdena: | Jämviktlösningens art: |
|---|---|
| Någon av realdelarna >0 | Instabil |
| Alla realdelarna < 0 | Asymptotiskt stabil |
| Realdelarna = 0, imaginärdelarna ≠ 0 | stabil, ej asymptotiskt stabil |

*Degenererade fall* har man då minst ett av egenvärdena = 0. I motsats till fallen som räknas i tabellen har man då flera jämviktspunkter. Dessa är aldrig asymptotiskt stabila. För att kunna avgöra om instabilitet råder eller inte kan information om egenvektorerna behövas.

## Fasporträtt för 2 × 2-fallet

De möjliga fasporträtten är (bortsett från linjära deformationer – töjningar, vridningar, skuvningar) inte särskilt många. De viktigaste:

| | Egenvärden $\lambda_1$ och $\lambda_2$ | Typ av porträtt |
|---|---|---|
| 1. | olika, reella $\neq 0$ och har samma tecken | Nod |
| 2. | reella $\neq 0$ och har olika tecken | Sadel |
| 3. | icke-reella, konjugerat komplexa, med realdel $\neq 0$ | Spiral |
| 4. | icke-reella, konjugerat komplexa, med realdel $= 0$ | Centrum |

Övriga fall, då egenvärdena är reella och lika eller om någon av dem = 0, kallas degenererade. (Jmfr ZC Fig 10.14).
För dem behöver man information om egenvektorerna för att kunna bestämma typen.