Variation-av-parameter-metoden ZC 4.6

Lösning av inhomogen ekvation med hjälp av den fullständiga lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Låt

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

vara den allmänna lösningen till

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Väljer man funktioner

$$u_1(x), u_2(x), \ \ldots u_n(x),$$

så att

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ \vdots \\ u_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix},$$

så kommer

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n$$

att vara en partikulärlösning till

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Koefficienterna $a_0, a_{1, \ldots,} a_{n-1}$ och f förutsätts vara kontinuerliga funktioner av x i det betraktade intervallet.

Dagens tema f.ö.
(ZC8.1 – 2)

Linjära ODE-system av ordning 1:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t), \\ \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

där a-koefficienterna och f:en antas vara kontinuerliga funktioner av t i ett intervall I. (En möjlighet är då förstås att de är konstanta.)

På matrisform kan sådana skrivas:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t).$$

Homogena system $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, (H)
Allmänna system $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}$ ”godtyckligt”. (A)

Vid *begynnelsevärdesproblem* är dessutom de n obekanta funktionernas värden kända i en ”begynnelsepunkt” $t = t_0$:

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0.$$

Superpositionsegenskaper: (ZC 8.1)

- $\boldsymbol{X}_1$ och $\boldsymbol{X}_2$ lösningar till (H)
  $\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2$ lösningar till (H) för godtyckliga konstanter c_1 och c_2. (Th 8.2)

- $\boldsymbol{X}_1$ och $\boldsymbol{X}_2$ lösningar till (A)
  $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$ lösning till (H).

- Om (H) har *reella* koefficienter:

  $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} + \mathrm{i}\boldsymbol{V}$ ($\boldsymbol{U}$ och $\boldsymbol{V}$ reella) en komplex lösning till (H) $\Leftrightarrow$
  $\boldsymbol{U}$ och $\boldsymbol{V}$ lösningar till (H).

Lösningmängdernas struktur: (ZC 8.1)

- Allmän lösning till (H): (Th 8.5)

$$\boldsymbol{X}_h = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{X}_n,$$

  där $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och
  där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är godtyckliga konstanter.
- Allmän lösning till (A): (Th 8.6)

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_p + \boldsymbol{X}_h$$

  där $\boldsymbol{X}_p$ är någon (vilken som helst) lösning till (A) och $\boldsymbol{X}_h$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

En lösningsmetod (*egenvärdesmetoden*) för *homogena* system med *konstanta* koefficienter

(ZC 8.2)

Metoden bygger på ansatsen:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}\, e^{\lambda t},$$

där $\boldsymbol{k}$ är en konstant vektor $\neq \mathbf{0}$ och λ en konstant skalär (reell eller komplex).

Ansatsen leder till följande villkor på λ:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

dvs. till polynomekvationen

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(*Egenvärdesekvationen*, *karakteristiska ekvationen*, λ-rötterna kallas *egenvärden*.)

Och följande villkor på $\boldsymbol{k}$:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \text{ dvs.}$$

det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\boldsymbol{k}$-lösningarna $\neq \mathbf{0}$ kallas *egenvektorer*).

Med hjälp av egenvärdesbestämningar kan alltid n st linjärt oberoende lösningar till (H) bestämmas. Typiska exempel:

(i) ZC 8.2, ex. 2 (reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

(ii) ZC 8.2, ex. 6 (icke-reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

och de mera ”ovanliga” fallen:

(iii) ZC 8.2, ex. 3 – 5 (multipla rötter till egenvärdesekvationen).