Dagens teman

- *Beräkningsexempel*. Homogena system med komplexa resp. multipla egenvärden. (ZC 8.2.2-3)

- *Variation-av-parametermetoden* för lösning av allmänna linjära ODE-system. (ZC 8.3)

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \quad \ldots \quad \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

Multipelrotsfallen:

För dubbelrötter (λ_0) till egenvärdesekvationen kan man visa att det alltid finns två linjärt oberoende lösningar av formen

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{k}_1 t + \boldsymbol{k}_0)\, e^{\lambda_0 t},$$

där $\boldsymbol{k}_1$ och $\boldsymbol{k}_0$ är konstanta vektorer. Dessa kan bestämmas ur sambanden:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^2 \boldsymbol{k}_0 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{k}_1 = (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \boldsymbol{k}_0. \end{cases} \qquad \text{(ZC, sid 344)}$$

Allmänt, för rötter av multiplicitet m så fungerar en liknande ansats med ett polynom av grad $m - 1$ som koefficient för $e^{\lambda_0 t}$,

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{k}_{m-1} t^{m-1} + \ldots + \boldsymbol{k}_1 t + \boldsymbol{k}_0)\, e^{\lambda_0 t}.$$

[Villkoren som bestämmer $\boldsymbol{k}$-vektorerna lyder då

$$\begin{cases} (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^m \boldsymbol{k}_0 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{k}_\nu = \dfrac{1}{\nu} (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I})\, \boldsymbol{k}_{\nu - 1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m - 1. \end{cases}$$

(ZC, sid 345, behandlar trippelrotsfallet)]

Variation-av-parametermetoden:
(ZC 8.3)

En metod för lösning av allmänna linjära ODE-system:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t), \;\; \boldsymbol{f} \;\; \text{"godtyckligt".} \qquad \text{(A)}$$

Metoden förutsätter att man känner (eller kan ta reda på) den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t),$$

men förutsätter inget annat om koefficienterna i $\boldsymbol{A}$-matrisen än att de är kontinuerliga funktioner av t.

Förberedelser:
Lös först motsvarande homogena system:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) \qquad \text{(H)}$$

Lösningsmängden, som för de fall då $\boldsymbol{A}$ är konstant kan bestämmas med egenvärdesmetoden, kan alltid skrivas:

$$\boldsymbol{X}_h = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{X}_n,$$

där $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H), c:na konstanter. (ZC 8.1, th 8.5).
På matrisform blir detta:

$$\boldsymbol{X}_h = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi \boldsymbol{c}$$

Φ kallas *fundamentalmatris* (ZC 8.3) och den karakteriseras av att

- kolonnvektorerna är n olika lösningar till (H), och
- kolonnvektorerna är linjärt oberoende, dvs $\det(\Phi) \neq 0 \Leftrightarrow \Phi$ är inverterbar.

Man har också att

$$\Phi'(t) = \boldsymbol{A}\Phi(t).$$

Metoden går ut på att man i ekvationen

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

ansätter

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\,\boldsymbol{U}(t).$$

Man får (ZC sid 344 - 345) att $\boldsymbol{X}(t)$ är en sådan lösning om och endast om $\boldsymbol{U}$ uppfyller villkoret

$$\boldsymbol{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\,\boldsymbol{f}(t).$$

Som allmän lösning till systemet får man då:

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\left(\boldsymbol{C} + \int_a^t \Phi^{-1}(s)\,\boldsymbol{f}(s)\,ds\right),$$

där $\boldsymbol{C}$ är en konstant vektor.

Med känt begynnelsevillkor $\boldsymbol{X}(a) = \boldsymbol{X}_0$ ger detta:

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(a)\boldsymbol{X}_0 + \Phi(t)\int_a^t \Phi^{-1}(s)\,\boldsymbol{f}(s)\,ds.$$