Dagens tema

- Mer om homogena linjära system med konstanta koefficienter:
  Fasplan(-rum), trajektorier, fasporträtt
  (ZC sid 340-1, ZC10.2)

Vi betraktar homogena linjära system *med konstanta koefficienter*.

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \tag{H}$$

Frågeställningar:

1° Vad händer med lösningarna $\boldsymbol{X}(t)$ i det långa loppet?
(Dvs. vad kan sägas om $\lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{X}(t)|$?)

2° Kommer två lösningar $\boldsymbol{X}_1(t)$ och $\boldsymbol{X}_2(t)$ vars begynnelsevärden bara skiljer ”litet” också ligga ”nära” varandra i fortsättningen?

Den senare frågan är nära släkt med den förra. Fråga 2 kan formuleras:

Om $\boldsymbol{X}_1(t)$ och $\boldsymbol{X}_2(t)$ är två lösningar för vilka

$$|\boldsymbol{X}_1(0) - \boldsymbol{X}_2(0)| < \varepsilon \text{ (”litet tal”)}$$

kommer då

$|\boldsymbol{X}_1(t) - \boldsymbol{X}_2(t)|$ att vara $< \varepsilon_1$ (annat ”litet tal”)

för alla $t > 0$?

Notera att $\boldsymbol{X}_1(t) - \boldsymbol{X}_2(t)$ enligt superpositionsprincipen också är en lösning till systemet (H), så fråga 2 kan mera koncist formuleras:

Om för lösningen $\boldsymbol{X}(t)$

$$|\boldsymbol{X}(0)| < \varepsilon \text{ (”litet tal”)}$$

kommer då

$|\boldsymbol{X}(t)|$ att vara $< \varepsilon_1$ (annat ”litet tal”)

för alla $t > 0$?

Obs att vi vet att alla lösningar till de homogena systemen är linjära kombinationer av funktioner av formen

$$\boxed{\boldsymbol{v}\, t^m\, \mathrm{e}^{\lambda t}},$$

där $\boldsymbol{v}$ är en konstant vektor, m heltal ≥ 0, λ egenvärde.
För de fall då λ inte är reellt ($= \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$) har motsvarande reella lösningar formen

$$\boxed{\boldsymbol{v}_1\, t^m\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t} \text{ och } \boxed{\boldsymbol{v}_2\, t^m\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t}$$

Om alla egenvärdena är enkla, så kommer bara linjärkombinationer av funktioner av typen

$$\boxed{\boldsymbol{v}\, \mathrm{e}^{\lambda t}}, \boxed{\boldsymbol{v}_1\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t} \text{ och } \boxed{\boldsymbol{v}_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t}$$

i fråga.

Av detta kan man se t.ex. att

- om alla egenvärdenas realdelar < 0, så är $\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{X}(t) = 0$ för *alla* lösningar och fråga 2 besvaras med ”ja”,

- för lösningar som innehåller termer som hör till egenvärden med realdel > 0 är $\lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{X}(t)| = \infty$ och fråga 2 med ”nej” om $\boldsymbol{X}_1(t) - \boldsymbol{X}_2(t)$ innehåller termer med sådana egenvärden.

Fasplan(-rum), trajektorier, fasporträtt
ZC sid 340-1, ZC10.2

Definitioner:

Lösningarna $\boldsymbol{X}(t)$ till ett system av differentialekvationer av format $n \times n$, kan uppfattas som en med variabeln (tiden) t vandrande punkt i rummet $\mathbf{R}^n$, (jmfr begreppet ”kurva på parameterform”).

Detta rum är då systemets *fasrum* (*fasplan* om n = 2) och lösningen sägs vara en *trajektoria* i detta rum. Den kurva som punkten beskriver är lösningens *bana* (eng. *orbit*). Mängden av alla banor utgör ekvationens *fasporträtt*.

(Obs: Trajektorierna beskriver den ”resa” partikeln utför – den talar om var partikeln finns vid varje tidpunkt, medan banorna bara beskriver vägen som resan följer. Fasporträttet kan ses som en ”karta” över vägnätet.)

Konstantlösningar motsvarar då lösningar vars banor består av en enda punkt. Dessa lösningar kallas systemets *jämviktslösningar* och dess bana är en *jämviktspunkt*.

Om systemdeterminanten ≠ 0, så finns bara en jämviktslösning, den ”triviala” $\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$.
Om det $\boldsymbol{A}$ = 0, så finns det flera.

För $n \times n$-system gäller

Om bland egenvärdena	Så är jämviktlösningen
någon av realdelarna > 0	instabil
alla realdelarna < 0	asymptotiskt stabil

Kvalitativa egenskaper hos 2×2-system:

Man har:

Egenvärden λ_1 och λ_2	Jämviktlösningen är
någon av realdelarna > 0	instabil
alla realdelarna < 0	asymptotiskt stabil
realdelarna $= 0$, imaginärdelarna $\neq 0$	stabil, ej asymptotiskt stabil

Degenererade fall har man då minst ett av egenvärdena = 0. I motsats till fallen som räknas i tabellen har man då flera jämviktspunkter. Dessa är aldrig asymptotiskt stabila. För att kunna avgöra om instabilitet råder eller inte kan information om antalet egenvektorer behövas.

Kvalitativa egenskaper hos 2×2-system:

De möjliga fasporträtten (bortsett från linjära deformationer – töjningar, vridningar, skuvningar) inte särskilt många. Systemmatrisens egenvärden avslöjar i de flesta fallen vilken typ det av fasporträtt det är fråga om. Man har

Egenvärden λ_1 och λ_2	Typ av porträtt
olika, reella $\neq 0$ och har samma tecken	Nod
reella $\neq 0$ och har olika tecken	Sadel
icke-reella, konjugerat komplexa, med realdel $\neq 0$	Spiral
icke-reella, konjugerat komplexa, med realdel $= 0$	Centrum

Fallen då egenvärdena är reella och lika eller om någon av dem = 0 brukar kallas *degenerarade* (Jmfr ZC Fig 10.14). Då behöver man information om egenvektorerna också för att kunna bestämma typen.