

Dagens teman

- Ortogonala funktioner (ZC11.1)
- Fourierserier (ZC11.2)

Serieutveckling av "godtyckliga" funktioner

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

Fourierserier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Viktiga egenskaper

1. Om $f(x)$ är kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar då a $< x < b$ (men f.ö. godtycklig), så gäller för alla x i intervallet $a < x < b$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

där $a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$

2. Den trunkerade serien

$$S_N(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

är den "bästa" approximationen till $f(x)$ bland alla linjära kombinationer av de ändligt många funktionerna

$$\cos nx \text{ och } \sin nx, n = 0, 1, \dots, N$$

i följande mening:

Om

$$T_N(x) = c_0/2 + \sum_{n=1}^N (c_n \cos nx + d_n \sin nx),$$

där c - och d -koefficienterna inte överensstämmer med motsvarande a - och b -koefficienter, så är

$$\int |f(x) - S_N(x)|^2 dx < \int |f(x) - T_N(x)|^2 dx.$$

—

—

Skalärprodukt och norm

Definitioner

Normen av en funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

Storheten $\|f(x) - g(x)\|$ är ett slags mått på avståndet mellan f och g .

Skalär produkt av två (reellvärda) funktioner $f(x)$ och $g(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx.$$

Funktionerna är *ortogonala* om $(f, g) = 0$.

Enligt ovan är $(f, f) = \|f(x)\|^2$.

Detta är i analogi med koordinatformlerna för skalärprodukt och belopp hos vektorer i \mathbf{R}^N :

Om

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N),$$

så är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{n=1}^N u_n v_n$$

och

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = \sum_{n=1}^N |u_n|^2$$

Speciellt för fourierserier visar det sig att:

1. Funktionerna

$$1, \cos nx \text{ och } \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

är parvis ortogonala på intervallet $-\pi < x < \pi$.

2. $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx|^2 dx = \pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$.

Fourierserieutvecklingen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

kan ses som en koordinatframställning av f i basen (basfunktionerna)

$$1, \cos nx \text{ och } \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

På grund av deras ortogonalitet får man:

$$(f(x), \cos mx) = a_m \int \cos^2 mx \, dx = a_m, \quad (m \neq 0)$$

$$(f(x), \sin mx) = b_m \int \sin^2 mx \, dx = b_m,$$

$$(f(x), 1) = \frac{a_0}{2} \int 1 \, dx = a_0,$$

dvs. utskrivet med integraler:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots$$