Dagens teman

- Partiella differentialekvationer (PDE)

  ”Klassiska” separabla ekvationer
  (ZC12.1, 12.2)

- Lösning av ett värmeledningsproblem
  (ZC 12.3)

”Klassiska” partiella differentialekvationer

Värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Förekommer bl.a. i problem om värmeledning och diffusion.

Vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Förekommer bl.a. i problem om vågutbredning i gaser och vätskor (t.ex. ljud), om elektromagnetiska vågor (ljus, radiovågor …).

Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Förekommer bl.a. i problem angående stationära värmefördelningar, elektriska och magnetiska potentialer, stationära strömningar.

I den här kursen begränsar vi oss till fallen då u beror av två variabler,

$u(x, t)$ i värmelednings- och vågekvationerna (”en-dimensionella fallen”) och

$u(x, y)$ för Laplaceekvationen (”två-dimensionella fall”).

Linjära PDE i två variabler av ordning ≤ 2.

ZC 12.1

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G.$$

I det allmänna fallet är $A, \dots, G$ funktioner av x och y, i våra exempel oftast konstanter.

Då $G = 0$ är ekvationen *homogen*, annars är den *inhomogen.*

Superpositionsprinciper gäller också för denna typ av ekvationer:

- u_1 och u_2 lösningar till en *homogen* ekvation $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ är lösningar till denna för godtyckliga konstanter c_1 och c_2.

- u_1 och u_2 lösningar till ekvationen $u = u_1 - u_2$ är en lösning till motsvarande homogena ekvation.

Rätt ställt problem

Differentialekvation med bivillkor (randvillkor, begynnelsevillkor) sådant att:

- En och endast en lösning finns.
- Lösningen beror ”kontinuerligt” på bivillkoren.

Vilka rand- och bivillkor som behövs för att ett problem skall vara rätt ställt beror väsentligen på koefficienterna A, B och C. Detta är orsaken till den klassificering som nämns i ZC Def 12.1:

- *parabolisk ekv.* om $B^2 - 4AC = 0$,
- *hyperbolisk ekv.* om $B^2 - 4AC > 0$,
- *elliptisk ekv.* om $B^2 - 4AC < 0$,

I den här kursen går man dock inte närmare in på detaljerna angående bivillkoren.

Lösningsmetoder som tas upp i kursen

- **Variabelseparation** ZC 12.1 – 6
  Tas upp nu.

- **Integraltransformering** ZC 14.2, 14.4
  Tas upp senare.