

Kontrollskrivning nr 2, Differentialekvationer II, för T2
den 7 mars 2007, kl 08.15 - 09.00

4p räcker för godkänt. Godkänd skrivning motsvarar godkänt på uppgift nr 2 vid tentan den 18 april och omtentan den 5 juni.

Liten formelsamling nedan, f.ö. inga hjälpmedel tillåtna.

1. a. Vilken funktion har fouriertransformen $\frac{2}{4 + 4t^2 + 3}$? (2p)
- b. Vilken funktion har fouriertransformen $\frac{2}{4 + 4t^2 + 3}$? (2p)
2. a. Beräkna fouriertransformen till fourierfaltningen

$$x(t) = \sin 3t * \frac{1}{4 + t^2}.$$
 (2p)
- b. Bestäm $x(t)$. (2p)

Svaren får inte innehålla några integraler.

Liten formelsamling:

Funktion	Fouriertransform
$\delta(t)$	1
1	$2\pi \delta(\omega)$
$\cos(at)$	$\pi(\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a))$
$\sin(at)$	$i\pi(\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a))$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{i}$

$$\mathcal{F}\{e^{at}\} = \frac{1}{|a|} \delta(\omega - a), \text{ om } a \text{ konstant } \neq 0.$$

$$x(t - a) = x(a - t),$$

om $x(t)$ kontinuerlig för $t = a$.

Funktion	Fouriertransform
Om $x(t)$	$X(\omega)$
så $X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
$e^{i\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} X(\omega)$
$x(at), a > 0$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$i\omega X(\omega)$
$t x(t)$	$i \frac{d}{d\omega} X(\omega)$

Lycka till!

Svar 070307

1a. $\frac{1}{2} e^{-|t|} - \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}|t|},$

1b. $-i \frac{1}{2} e^{-\sqrt{3}|t|} - \frac{1}{2} e^{-|t|} \cdot \text{sign } t.$

2a. $\frac{2i}{2} e^{-6} ((+ 3) - (- 3)),$

2b. $\frac{2}{2} e^{-6} \sin 3t.$

Kontrollskrivning nr 2, Differentialekvationer II, för T2
den 7 mars 2006, kl 10.15 - 11.00

4p räcker för godkänt. Godkänd skrivning motsvarar godkänt på uppgift nr 2 vid tentan den 19 april och omtentan den 7 juni.

Liten formelsamling finns på omstående sida, f.ö. inga hjälpmedel tillåtna.

1. Bestäm de funktioner som har fouriertransformerna

a. $X_1(\omega) = \frac{1}{(\omega^2 + 2)(\omega^2 + 4)}$, (2p)

b. $X_2(\omega) = e^{-3|\omega|}$. (2p)

(Frekvensvariabeln ω mäts i radianer/tidsenhet.)

2. Bestäm fouriertransformerna till

a. $y_1(t) = \sin(3t - \pi/2)$, (2p)

b. $y_2(t) = e^{-2|t|} \cos t$. (2p)

Svaren får inte innehålla några integraler eller faltningar.

Liten formelsamling

Fouriertransformen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

Funktion	Transform, mätt i rad./tidsenhet	Funktion	Transform, mätt i radianer/tidsenhet
Om $x(t)$	$Z(\omega)$	1	$2\pi \delta(\omega)$
så $Z(\omega)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$	$(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
$x(t)$	$X(\omega)$	$e^{i\omega t_0}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$e^{i\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$	$(t + t_0) + (t - t_0)$	$e^{i\omega t_0} + e^{-i\omega t_0} = 2 \cos(\omega t_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} X(\omega)$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$
$x(at), a > 0$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$(t + t_0) - (t - t_0)$	$e^{i\omega t_0} - e^{-i\omega t_0} = 2i \sin(\omega t_0)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$	$\sin(\omega_0 t)$	$i(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$
$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - nT)$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(\omega)$	$e^{-at} u(t), a > 0$	$\frac{1}{a + i\omega}$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$i\omega X(\omega)$	$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$t x(t)$	$i \frac{d}{d\omega} X(\omega)$	$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(i\omega)^n X(\omega)$	$\text{rect}(t)$	$\text{sinc}(\omega/(2\pi))$
$t^n x(t)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$	$\text{sinc}(t)$	$\text{rect}(\omega/(2\pi))$

Om δ -funktionen

Skalning: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$, om $a > 0$.

Faltning: $x(t) * \delta(t - a) = x(t - a)$.

Om $x(t)$ är kontinuerlig för $t = a$:

Multiplikation $x(t) \cdot \delta(t - a) = x(a) \cdot \delta(t - a)$,

Integration: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - a) dt = x(a)$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t) dt = 1$.

Derivata av språngfunktion: $\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$,

där $u(t) = 1$ om $t > 0$ och $= 0$ om $t < 0$.

Svar 060307

$$1a. \quad x_1(t) = \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|} - \frac{1}{8} e^{-2|t|},$$

$$1b. \quad x_2(t) = \frac{6it}{(9+t^2)^2}.$$

$$2a. \quad Y_1(s) = - \left(\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-3} \right),$$

$$2b. \quad Y_2(s) = \frac{2}{4+(s+1)^2} + \frac{2}{4+(s-1)^2}.$$