Dagens teman

- δ-funktionen, räkneexempel (F §4)
- Derivator av δ-funktioner

δ-funktionen, viktiga egenskaper

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

2. $$\int_{a}^{b} \delta(t)\, dt = 0,$$

om 0 ligger *utanför* intervallet $a \le t \le b$.

3. $x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$ och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt = x(0),$$

om $x(t)$ är kontinuerlig i $t = 0$.

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x(t),$$

dvs. $\delta(t) * x(t) = x(t)$.

5. $$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t), \text{ om } a \neq 0,$$

speciellt:

$\delta(-t) = \delta(t)$, dvs.
$\delta(t)$ är en jämn funktion.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, x(t)\, dt = x(a),$$

$$\int_{b}^{c} \delta(t-a)\, x(t)\, dt = \begin{cases} x(a), & \text{om } b < a < c, \\ 0, & \text{om } a \text{ ligger utanför intervallet } b \le a \le c. \end{cases}$$

Några speciella derivator

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, u(t) = \delta(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{sign}\; t = 2\delta(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, |t| = \mathrm{sign}\; t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, |t| = 2\delta(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{rect}\; t = \delta(t + 1/2) - \delta(t - 1/2).$$

δ-funktionen och LTI-system

- δ-*funktionen som insignal*:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\;L\;} \longrightarrow h(t).$$

Funktionen *h* kallas *pulssvaret*.

Av detta följer för godtyckligt τ:

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\;L\;} \longrightarrow h(t-\tau),$$

och för ”godtycklig” funktion $x(t)$:

$$x(\tau)\,\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\;L\;} \longrightarrow x(\tau)\,h(t-\tau).$$

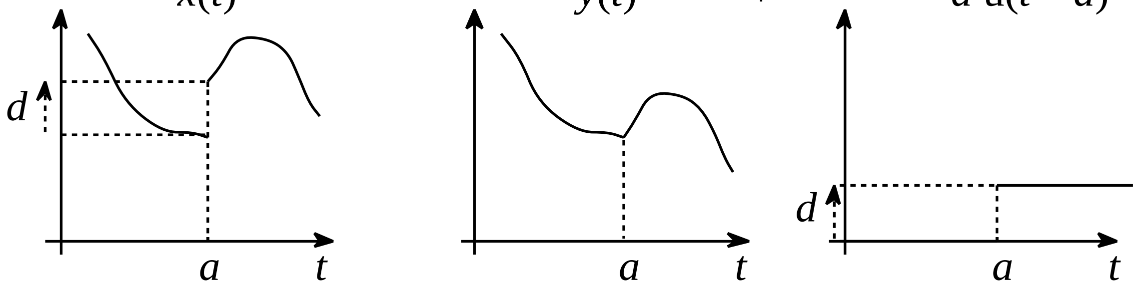
Men $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = x(t),$$

alltså

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;L\;} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

Derivering av diskontinuerliga funktioner

$x(t) \quad = \quad y(t) \quad + \quad d\,\mathrm{u}(t-a)$



Funktion med språngdiskontinuitet	Kontinuerlig funktion	Standardsprång

Generaliserad derivata:

$x'(t) \quad = \quad y'(t) \quad + \quad d\,\delta(t-a)$

Klassisk derivata	δ-puls
$\{x'(t)\}$	