

Dagens teman

- Linjära ODE av godtycklig ordning.
Lösningarnas struktur. (ZC4.1)
- Linjära ODE av godtycklig ordning med
konstanta koefficienter. Homogena. (ZC4.3)
- Linjära ODE av godtycklig ordning med
konstanta koefficienter. Inhomogena.
Variation-av-parametermetoden. (ZC4.6)

Linjära ODE av godtycklig ordning: ZC 4.1

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= \\ &= g(x). \quad \text{Allmänna fallet,} \quad (\text{A}) \\ &= 0. \quad \text{Homogena fallet,} \quad (\text{H}) \end{aligned}$$

Superpositionsegenskaper:

- y_1 och y_2 lösningar till (H)
 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ lösningar till (H) för godtyckliga konstanter c_1 och c_2 .
- y_1 och y_2 lösningar till (A)
 $y = y_1 - y_2$ lösning till (H).
- Om (H) har *reella* koefficienter:
 $y = u + iv$ (u och v reella) en komplex lösning till (H)
 u och v lösningar till (H).

Existens- och entydighetssats (ZC, Th 4.1):

Om koefficienterna och HL i ekvationen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

är kontinuerliga i ett intervall, så kommer begynnelsevärdesproblemen (med begynnelsepunkten i intervallet) att ha en och endast en lösning i det intervallet.

Lösningmängdernas struktur:

- Allmän lösning till (H):

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n,$$

där y_1, y_2, \dots, y_n är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och där c_1, c_2, \dots, c_n är godtyckliga konstanter.

- Allmän lösning till (A):

$$y = y_p + y_h$$

där y_p är någon (vilken som helst) lösning till (A) och y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Definition av ”linjärt oberoende funktioner”:

n st funktioner $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ är *linjärt oberoende* på ett intervall I om likheten

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) = 0, \quad (*)$$

för alla x i intervallet I , c :na konstanter, är uppfylld endast om c :na alla är $= 0$.

Motsatsen ”linjärt beroende funktioner” innebär att likheten (*) uppfylls med några av c :na $\neq 0$.

Detta är ekvivalent med att minst en av y -funktionerna är en linjär kombination till de andra, ex.vis

$$y_1(x) = d_2y_2(x) + \dots + d_ny_n(x)$$

Två funktioner är linjärt beroende om och endast om den ena av dem är en konstant multipel av den andra.

Wronskis testförfarande

Om n st funktioner

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x),$$

alla är lösningar till ekvationen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

där a :na är kontinuerliga funktioner av x i ett intervall I ,

så är de linjärt oberoende i detta intervall om och endast om determinanten

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

för något x i intervallet.

Variation-av-parameter-metoden ZC 4.6

Lösning av inhomogen ekvation med hjälp av den fullständiga lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Låt

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

vara den allmänna lösningen till

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Väljer man funktioner

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x),$$

så att

$$\begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & \dots & y_n & u_1'(x) & 0 \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & u_2'(x) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & u_n'(x) & f(x) \end{array},$$

så kommer

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$$

att vara en partikulärlösning till

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Koefficienterna a_0, a_1, \dots, a_{n-1} och f förutsätts vara kontinuerliga funktioner av x i det betraktade intervallet.