

Dagens teman

- *Beräkningsexempel.* Homogena system med multipla egenvärden. (ZC 8.2.2)
- *Variation-av-parametermetoden* för lösning av allmänna linjära ODE-system. (ZC 8.3)

$$x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t)$$

$$x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t)$$

- Högre ordningens system som specialfall av 1:a ordningens. (Tillägg till ZC)

Multipelrotsfallen:

För dubbelrötter (λ_0) till egenvärdesekvationen kan man visa att det alltid finns två linjärt oberoende lösningar av formen

$$\mathbf{X} = (\mathbf{k}_1 t + \mathbf{k}_0) e^{\lambda_0 t},$$

där \mathbf{k}_1 och \mathbf{k}_0 är konstanta vektorer. Dessa kan bestämmas ur sambanden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^2 \mathbf{k}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{k}_1 &= (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{k}_0. \end{aligned} \quad (\text{ZC, sid 344})$$

Allmänt, för rötter av multiplicitet m så fungerar en liknande ansats med ett polynom av grad $m - 1$ som koefficient för $e^{\lambda_0 t}$,

$$\mathbf{X} = (\mathbf{k}_{m-1} t^{m-1} + \dots + \mathbf{k}_1 t + \mathbf{k}_0) e^{\lambda_0 t}.$$

[Villkoren som bestämmer \mathbf{k} -vektorerna lyder då

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^m \mathbf{k}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{k}_i &= \frac{1}{i!} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^i \mathbf{k}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m - 1. \end{aligned}$$

(ZC, sid 345, behandlar trippelrotsfallet.)]

Variation-av-parametermetoden:
(ZC 8.3)

En metod för lösning av allmänna linjära ODE-system:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{f}(t), \mathbf{f} \text{ "godtyckligt"}. \quad (\text{A})$$

Metoden förutsätter att man känner (eller kan ta reda på) den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t),$$

men förutsätter inget annat om koefficienterna i \mathbf{A} -matrisen än att de är kontinuerliga funktioner av t .

Förberedelser:

Lös först motsvarande homogena system:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) \quad (\text{H})$$

Lösningssmängden, som för de fall då \mathbf{A} är konstant kan bestämmas med egenvärdesmetoden, kan alltid skrivas:

$$\mathbf{X}_h = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \dots + c_n\mathbf{X}_n,$$

där $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ är n st linjärt oberoende lösningar till (H), c :na konstanter. (ZC 8.1, th 8.5).

På matrisform blir detta:

$$\mathbf{X}_h = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathbf{c}$$

kallas *fundamentalmatris* (ZC 8.3) och den karakteriseras av att

- kolonnvektorerna är n olika lösningar till (H), och
- kolonnvektorerna är linjärt oberoende, dvs $\det(\mathbf{X}) \neq 0$ är inverterbar.

Man har också att

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t).$$

Metoden går ut på att man i ekvationen

$$X'(t) = AX(t) + f(t)$$

ansätter

$$X(t) = \Phi(t) U(t).$$

Man får (ZC sid 394 - 395),

$$U'(t) = -\Phi^{-1}(t) f(t),$$

och som allmän lösning:

$$X(t) = \Phi(t) C + \int_a^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds ,$$

där C är en konstant vektor.

Med känt begynnelsevillkor $X(a) = X_0$ ger detta:

$$X(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(a) X_0 + \int_a^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds.$$

Högre ordnings system

Varje system av differentialekvationer av högre ordning är ekvivalent med ett 1:a ordningens system.

Konstgrepp:

Om systemet innehåller funktionen $\frac{d^n x}{dt^n}$ så införs nya obekanta funktioner

$$x_1 = \frac{dx}{dt},$$

$$x_2 = x_1', \quad = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$x_3 = x_2', \quad = \frac{d^3 x}{dt^3},$$

.....

$$x_{n-1} = x_{n-2}', \quad = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}.$$

Dessa ekvationer tillförs systemet. Sedan ersätts alla förekomster av derivatorna upp till ordning $n - 1$ med dessa nya funktioner och n :te derivatan med 1:a-derivatan x_{n-1}' .