# Dagens teman

- Fourierserier (forts) (ZC11.2)

  Funktioner definerade i godtyckliga begränsade intervall

- Ortogonala funktioner (ZC11.1)

Skalning av $x$-axeln ger: (ZC Def 11.5)

Fourierserier för funktioner $f(x)$ i intervall $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x\right),$$

där
$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x \, dx, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Allmännare: För $f(x)$ def i intervall $I$ av längd $L$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{L} x\right),$$

där
$$a_n = \frac{2}{L} \int_{I} f(x) \cos \frac{2n\pi}{L} x \, dx, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{I} f(x) \sin \frac{2n\pi}{L} x \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Konvergenssats (ZC Th 11.1)

Om $f(x)$ är $L$-periodisk, styckvis kontinuerlig och styckvis deriverbar så är (den $L$-periodiska) fourierserien för $f$ =

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

(Detta medelvärde = $f(x)$ i kontinuitetspunkterna.)

**Skalärprodukt och norm**

Definitioner (ZC Def 11.1 – 3)

*Normen* av en funktion $f(x)$, $a \le x \le b$:

$$\|f(x)\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Storheten $\|f(x) - g(x)\|$ är ett slags mått på avståndet mellan $f$ och g.

*Skalär produkt* av två (reellvärda) funktioner $f(x)$ och $g(x)$, $a \le x \le b$:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Funktionerna är *ortogonala* om $(f, g) = 0$.

Enligt ovan är $(f, f) = \|f(x)\|^2$.

Detta är i analogi med koordinatformlerna för skalärprodukt och belopp hos vektorer i $\mathbf{R}^N$:

Om

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N),$$

så är

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{n=1}^{N} u_n v_n$$

och $$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2 = \sum_{n=1}^{N} |u_n|^2$$

Speciellt för fourierserier:

1. Funktionerna

$$1, \cos nx \text{ och } \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

är parvis ortogonala på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$.

2. $\|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 = \pi$, $\|1\|^2 = 2\pi$.

Fourierserieutvecklingen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

kan ses som en koordinatframställning av $f$ i basen (basfunktionerna)

$$1, \cos nx \text{ och } \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

På grund av deras ortogonalitet får man:

$$(f(x), \cos mx) = a_m \|\cos mx\|^2 = \pi a_m,$$

$$(f(x), \sin mx) = b_m \|\sin mx\|^2 = \pi b_m,$$

$$(f(x), 1) = \frac{a_0}{2} \|1\|^2 = \pi a_0,$$

dvs. utskrivet med integraler:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \qquad m = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \ldots$$