Dagens teman

- Ortogonala funktioner (ZC11.1)
- Sinus- resp. cosinusutvecklingar (ZC11.3)
- Fouriermetoder, inledning (Fouriermet. §1)
  - Komplexa fourierserier
  - Fouriertransformen (orientering)

Skalärprodukt och norm

Definitioner (ZC Def 11.1 – 3)

Normen av en funktion $f(x)$, $a \le x \le b$:

$$\|f(x)\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Storheten $\|f(x) - g(x)\|$ är ett slags mått på avståndet mellan f och g.

Skalär produkt av två (reellvärda) funktioner $f(x)$ och $g(x)$, $a \le x \le b$:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Funktionerna är *ortogonala* om $(f, g) = 0$.

Enligt ovan är $(f, f) = \|f(x)\|^2$.

Fourierserieutvecklingen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

kan ses som en koordinatframställning av f i basen (basfunktionerna)

$$1, \cos nx \text{ och } \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

På grund av deras ortogonalitet får man:

$$(f(x), \cos mx) = a_m \|\cos mx\|^2 = \pi a_m,$$

$$(f(x), \sin mx) = b_m \|\sin mx\|^2 = \pi b_m,$$

$$(f(x), 1) = \frac{a_0}{2} \|1\|^2 = \pi a_0,$$

dvs. utskrivet med integraler:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, \mathrm{d}x, \qquad m = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, \mathrm{d}x, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Utveckling av udda resp jämna funktioner

Fourierserier för *jämna* funktioner $f(x)$ i $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x,$$

där $$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x \, dx, \; n = 0, 1, 2,$$

…

Fourierserier för *udda* funktioner $f(x)$ i $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x,$$

där $$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x \, dx, \; n = 1, 2, 3,$$

…

Komplex fourierserieutveckling

(Fouriermetoder 1.1)

L-periodisk

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi j n t/L}, \qquad \text{(Syntesekvation)}$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t) \, e^{-2\pi j n t/L} \, dt \qquad \text{(Analysekvation)}$$

Om $x(t)$ reell och

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{L} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} t \right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi j n t/L}$$

så gäller

$$\begin{cases} a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, & \text{då } n \geq 0, \\ b_n = -2 \operatorname{Im} c_n, & \text{då } n \geq 1. \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - j b_n}{2}, & \text{då } n > 0, \\ \dfrac{a_{-n} + j b_{-n}}{2}, & \text{då } n < 0, \\ c_0 = \dfrac{a_0}{2}, & \text{då } n = 0. \end{cases}$$

Fouriertransformen (F 1.1)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \qquad \text{(Syntesekvation)}$$

där

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \qquad \text{(Analysekvation)}$$