Dagens teman

- Energi hos signal, Parsevals relation (F 1.3)
- LTI-system och fouriertransformer (F 1.4)
- Förberedelser

  Geometriskt om grafer (F 2)

    Speciella funktioner: sign,
    språngfunktionen, rektangelfunktioner

Skalärprodukt för komplexa funktioner
(F 1.3)

Skalärprodukt:

$x(t)$ och $y(t)$ definierade i intervall $a < t < b$
($a = -\infty$ och/eller b = ∞ ej uteslutna).

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ortogonalitet:

$$x(t) \qquad y(t) \;\Leftrightarrow\; (x(t), y(t)) = 0.$$

Viktigt exempel: Om m och n olika heltal så är

$$\mathrm{e}^{2\pi j nt/L} \qquad \mathrm{e}^{2\pi j mt/L}$$ på intervall av längd L.

Norm:

$$\|x(t)\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \sqrt{(x(t), x(t))}.$$

Exempelvis: På intervall av längd L:

$$\|\mathrm{e}^{2\pi j nt/L}\|^2 = L.$$

Storheten $\|x(t)\|^2$ är ett mått på signalens energiinnehåll.

Parsevals relation (F 1.3)

För fourierserier:

$$\text{Om } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi j n t/L}, \text{ så är}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |x(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

För fourierintegraler:

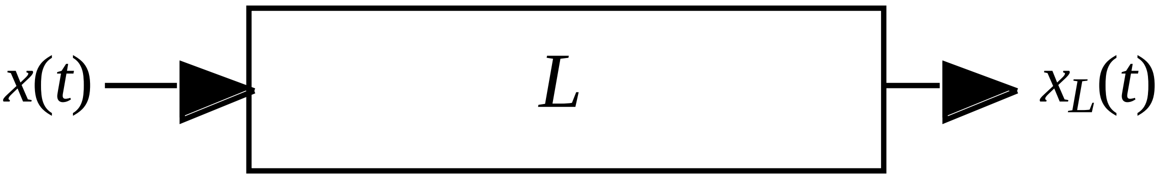
$$\text{Om } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \, e^{j\omega t} \, d\omega, \text{ så är}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega.$$

Energitolkning av dessa relationer

”Energin hos en signal
= summan av delsvängningarnas energi.”

Linjära tidsinvarianta system (LTI-system)



Definierande egenskaper:

1° *(Linjaritet)*

Om

$$z(t) = ax(t) + by(t),\ a \text{ och } b \text{ konstanter,}$$

så är

$$z_L(t) = ax_L(t) + by_L(t).$$

2° *(Tidsinvarians)*

Om α är en reell konstant, så gäller:

$$y(t) = x(t - \alpha) \qquad y_L(t) = x_L(t - \alpha).$$

Några viktiga egenskaper:

1. (Karakterisering av LTI-system)

För alla LTI-system gäller:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

där $h(t)$ (”pulssvaret”) är en ”funktion” som entydigt karakteriserar systemet.

Räkneoperationen på höger sida

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

kallas *faltningen av h* och x, skrivs $h(t) * x(t)$.

2. (Egenfunktioner till LTI-system)

$$e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow H(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$

där

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

dvs.

De harmoniska funktionerna $e^{i\omega t}$ är egenfunktioner till *alla*(!) LTI-system. Motsvarande egenvärde ges av fouriertransformen för systemets pulssvar.

$H(\omega)$ kallas systemets *överföringsfunktion.*

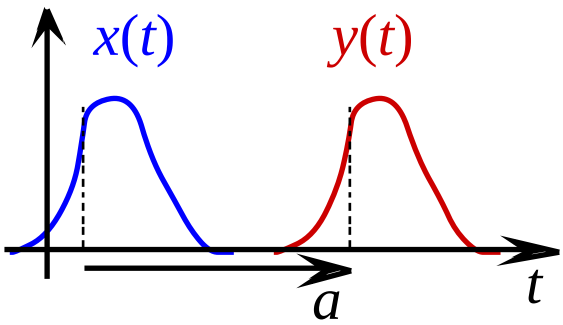
3. (Överföringsfunktionens roll)
Om

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow y(t),$$

så gäller för fouriertransformerna till de tre ingående funktionerna x, h och y att

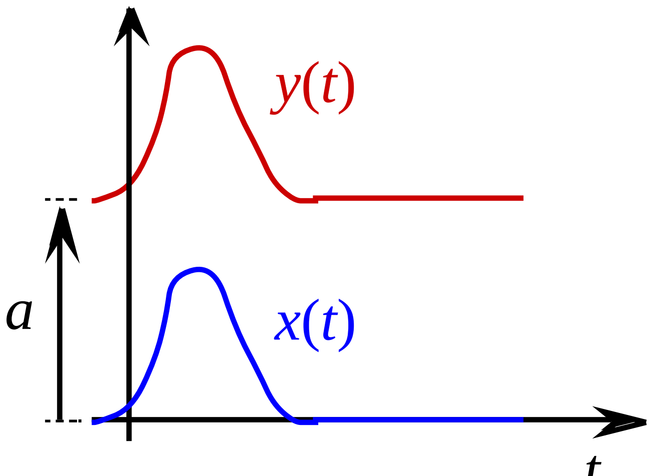
$$Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega).$$

Horisontell translation



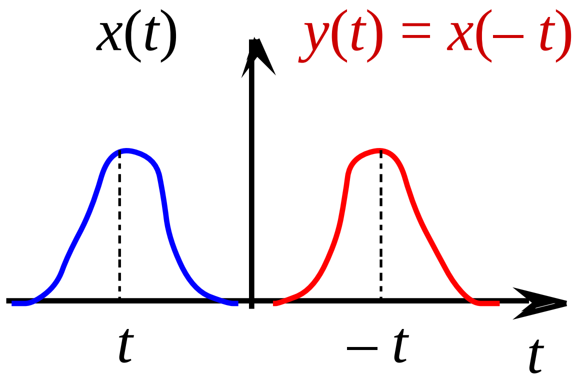
$$y(t) = x(t - a)$$

Vertikal translation



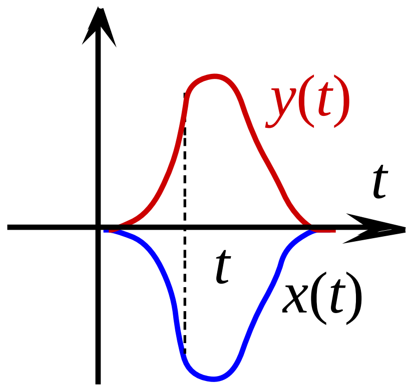
$$y(t) = x(t) + a$$

Spegling i vertikala axeln



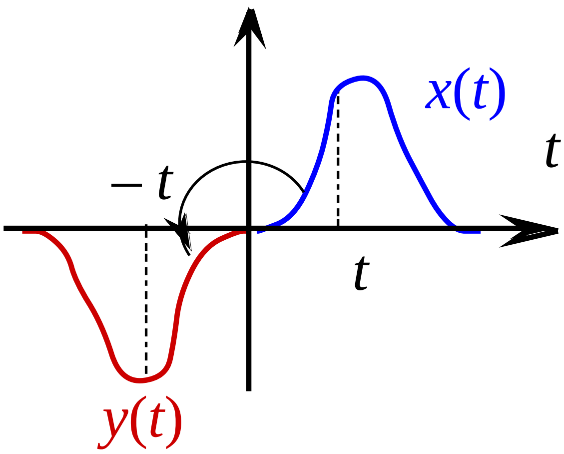
$$y(t) = x(-t)$$

Spegling horisontella axeln



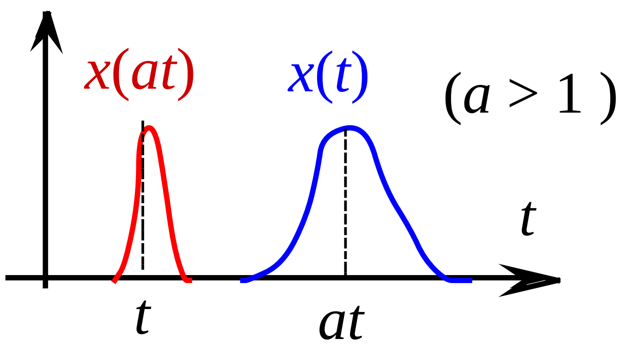
$$y(t) = -x(t)$$

Vridning ett halvt varv kring origo



$$y(t) = -x(-t)$$

Töjning i horisontell led

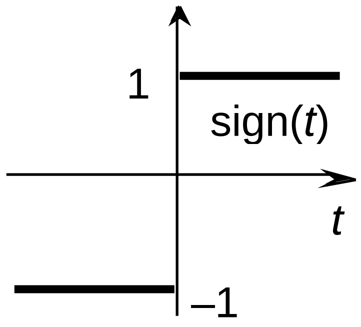


$$y(t) = x(at)$$

Speciella funktioner:

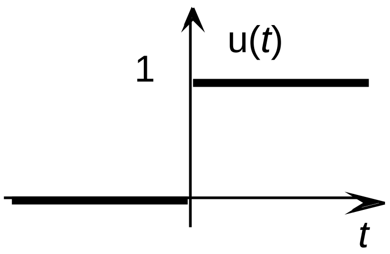
Signumfunktionen

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1, \text{ då } 0 < t, \\ -1, \text{ då } t < 0. \end{cases}$$



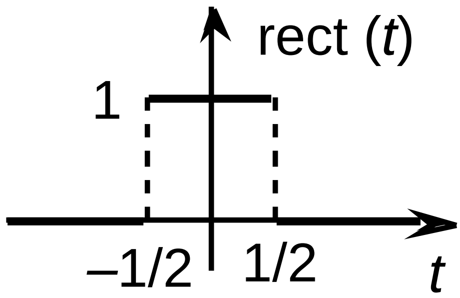
Enhetssprånget, Heavisides funktion

$$u(t) = \begin{cases} 1, \text{ då } 0 < t, \\ 0, \text{ då } t < 0. \end{cases}$$



Rektangelfunktioner

$$\operatorname{rect}(t) = \begin{cases} 1, \text{ om } |t| < 1/2, \\ 0, \text{ om } |t| > 1/2. \end{cases}$$



$$\operatorname{rect}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, \text{ då } a < t < b, \\ 0, \text{ då } t > b \text{ eller } t < a. \end{cases}$$